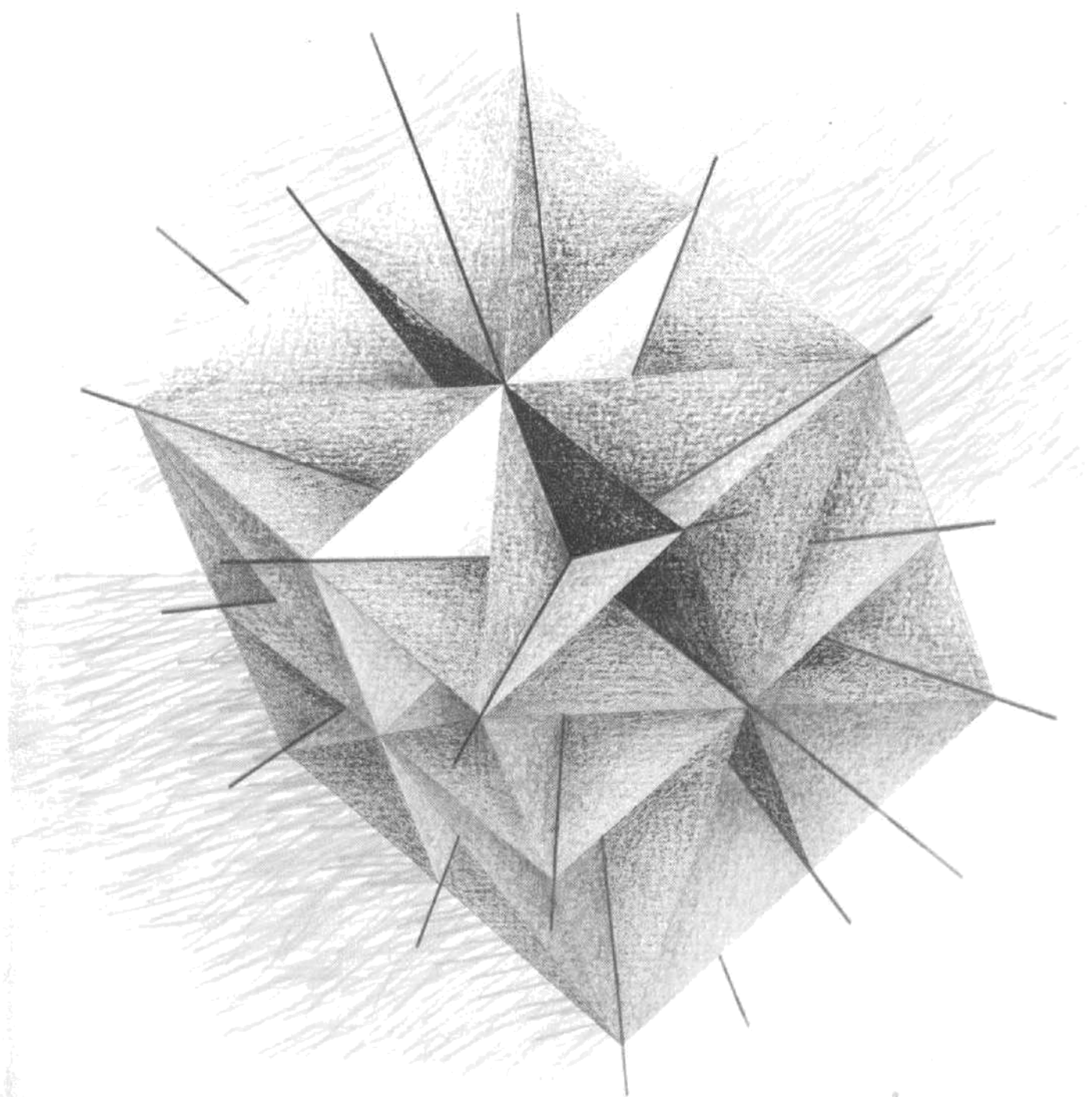


Арнольд БЕРНХАРДТ

Проективная геометрия



Арнольд БЕРНХАРДТ

Проективная геометрия

Курс, основанный
на геометрических
построениях
и наблюдениях

Москва «Парсифаль» 2003

Арнольд БЕРНХАРДТ. Проективная геометрия. Курс основанный на геометрических построениях и наблюдениях. Учебник, предназначенный для преподавания и самостоятельного изучения. / Пер. с нем. Чибисовой О.И. – М., «Парсифаль» (Издательство Московского Центра вальдорфской педагогики), 2003. – 184 с.

Книга швейцарского математика и педагога Арнольда Берихардта посвящена одному из интереснейших разделов современной геометрии, к сожалению, незаслуженно выведенному за рамки традиционной школьной программы. Автор пытается опровергнуть расхожее представление о проективной геометрии как о сугубо теоретической и в высшей степени абстрактной дисциплине, проводя читателя через ряд тщательно подобранных упражнений и рассмотрений. Начиная с самого простого пространственного объекта – куба, автор переходит к вопросам центрального проектирования и построения перспективных изображений, попутно вводя понятия бесконечно удаленных объектов и рассматривая аксиоматику проективной плоскости и проективного пространства с присущей им двойственной структурой. В книге с разных сторон освещается целый ряд классических «проективных» разделов (в т.ч. теорема Дезарга, геометрия полного четырехугольника, конические сечения, теоремы Паскаля и Брианшона и многое другое).

Хотя материал некоторых глав никак нельзя назвать элементарным, автор, в разумных пределах жертвуя полнотой и строгостью изложения, все время стремится предоставить заинтересованному читателю возможность расширить рамки своих геометрических представлений, опираясь на совершенно элементарные рассуждения. Эта особенность книги превращает ее, среди прочего, в прекрасный, наглядный учебник по проективной геометрии, адресованный интересующимся математикой школьникам старших классов, учителям и студентам.

ISBN 5-85251-070-x

©Московский Центр вальдорфской педагогики
2003

Arnold Bernhard «Projektive Geometrie» aus der Raumschauung zeichnend entwickelt
Lehr- und Übungsbuch für Unterricht und Selbststudium
©Verlag Freies Geistesleben GmbH, Stuttgart, 1984

Содержание

В качестве предисловия	5
1. Развитие пространственного мышления — сечения куба	7
2. Подвижные представления — «пила-волчок»	11
3. Центральное проектирование	14
4. Растущие треугольники	18
5. От конечного к бесконечному — прямая как целое	20
6. Ряды точек и пучки прямых как объекты чистого мышления	22
7. Плоскость как целое	25
8. Двумерные объекты — поля и связки	28
9. Пространство как целое	30
10. Обзор основных элементов — двойственная структура	31
11. Центральная перспектива	32
12. Сгорающая свеча — центрально-линейная (перспективная) коллинеация	36
13. Множества точек и области прямых — ядра и оболочки	42
14. Шкалы роста — шкалы с двумя точками концентрации	47
15. Специальные случаи перспективной коллинеации	56
16. Гармоническое отражение — «прыгающее» отображение с особым шагом	62
17. Только линированы или только центрированы? Теорема Дезарга	68
18. Полный четырехугольник и полный четырехсторонник — гармоническая элементарная фигура	75
19. «Шаговая мера» — шкалы с одной точкой концентрации	80
20. Геометрия связки	82
21. Двойственность в пространстве — полный гексаэдр и полный октаэдр — перспективное (центрально-планарное) преобразование	86
22. Симметралы — кривые, точки которых равноудалены от определяющих элементов	94
23. Конические сечения — центральные проекции окружности	103
24. Эллипс, парабола и гипербола в пятиконечной звезде — шестиугольники Паскаля и Брианшона	109
25. Полюс и поляра — гармоническое отражение кривых 2-го порядка	122
26. Внутреннее и внешнее — большое и малое. Евклидова и полярно-евклидова геометрия	131
27. Окружность двойных точек	139
28. Экскурс в лучевую геометрию — геометрия в пространстве прямых	145
Приложения	153
Список литературы	181

В качестве предисловия

Уважаемый читатель!

Кто бы вы ни были, школьник, учитель или просто интересующийся геометрией, данная книга призвана провести вас по определенному пути – пути переживания чистого мышления.

Повседневность приучила нас к различным геометрическим объектам – коробкам, мячам, цветочным горшкам. Мы оперируем с ними, практически никогда не задумываясь над законами, по которым они построены. Геометрические знания, необходимые для решения повседневных проблем, мы приобрели уже довольно давно. Возникает вопрос: все ли, что можно знать по этому поводу, мы знаем? Ответ очевиден: конечно, нет!

Настоящая книга начинается с рассмотрения куба. По ходу дела читатель научается точнее представлять пространственные объекты. Однако довольно скоро естественным ходом мышления он выводится за пределы привычного круга представлений к новым понятиям, и в конце концов такой на первый взгляд тривиальный объект, как куб, видится нам в совершенно новом ракурсе, о котором повседневное сознание не имело прежде никакого представления.

Цель книги – в расширении горизонтов нашего геометрического мышления. Выстраивая мир геометрических понятий, мы начинаем открывать такие отношения и связи, которые не могут быть даны простым чувственным восприятием. Благодаря этому мир для нас обогащается.

Названное расширение нашего мыслительного мира достигается лишь в процессе *упражнения* – упражнения прежде всего в *геометрическом построении* и во *вдумчивом рассмотрении* чертежей. Книга призвана пробудить в читателе интерес к экспериментам в этой области.

Главы имеют различную сложность: некоторые довольно просты, сквозь другие (например, сквозь главы 14, 21, 26) неискушенный читатель должен будет продираться путем терпеливого чтения. Однако тот, кто решится на это, кто возьмет на себя труд многократного проведения определенных построений (побуждением к чему призваны стать упражнения в конце книги), обнаружит, что с каждым разом его мысли становятся все более ясными и содержательными. Переживание мышления способно на такую интенсивность, что мы начинаем как бы внутренне видеть мысли. Такую ступень мыслительной жизни можно назвать «внутренним созерцанием».

Книга построена, насколько это возможно, таким образом, чтобы возникающие в ней утверждения сопровождалась доказательствами. Однако автор не стремился к абсолютной строгости и последовательности; если читателя не устраивают имеющиеся в книге пробелы, он может обратиться к специальной литературе. Для специалистов добавлю: в намерения автора не входило опираться исключительно на аксиомы проективной геометрии и строгий синтетический подход. Порой метрические представления быстрее помогут ввести в контекст проективной геометрии. Возможность независимого от всяких метрических структур построения проективной геометрии продемонстрирована в ряде прекрасных работ. Аксиоматическая строгость не входит в круг основных задач данной книги; автор скорее стремится привести заинтересованного читателя к максимально насыщенному *переживанию проективной геометрии*. Сами главы требуют для своего прочтения весьма скромных предварительных знаний; известный математический багаж предполагается только при работе с Приложениями.

Для того чтобы проективная геометрия стала общим достоянием (а время для этого настало), естественно, необходимо включить соответствующие разделы в школьную программу, прежде всего старших классов. Подготовительные упражнения, в смысле первых двух глав, можно начинать и раньше, причем, чем основательнее они будут проделаны, тем лучше. Переход к чисто проективным рассмотрениям отнюдь не является легкой задачей. Автор в ходе своей 24-летней педагогической деятельности (18 лет ее были отданы школе имени Рудольфа Штейнера в городе Базеле, Швейцария) нащупал определенный путь, следуя по которому можно подвести школьников к проективной геометрии. Данный путь, где отправной точкой является центральная перспектива, имеет преимущество — он таит в себе практически неисчерпаемые возможности для экспериментирования в области геометрических построений, приводя к центрально-линейной коллинеации, являющейся удобным средством для работы с понятием метаморфозы. Другой необходимой стороной является мыслительная проработка понятия бесконечности. Упражнения в центральном проектировании довольно быстро заставляют ученика почувствовать, что его мышление стремится выйти за рамки видимого чертежа. Если все время мысленно возвращаться к собственному геометрическому опыту, в сознании «естественным образом» — хотя, разумеется, и не сразу — возникают такие понятия, как «бесконечно удаленная точка», «бесконеч-

¹ Например: Луис Лохер-Эрнст. Проективная геометрия.

но удаленная прямая» и «бесконечно удаленная плоскость». Работая в классе, учитель должен осторожно и терпеливо развивать и прояснять понятия; у учеников ни в коем случае не должно возникнуть чувство, что учитель им что-то навязывает.

К сожалению, недостаток учебного времени не позволяет рассмотреть в школе все основные главы проективной геометрии. Однако в рамках двух-трех эпох все же вполне возможно — выборочно — поработать в духе проективной геометрии, чему и призвана способствовать предлагаемая книга. Помимо этого она могла бы послужить подспорьем тем учащимся (и не только будущим математикам), которые чувствуют потребность получить *целостное* представление о проективной геометрии и собственными усилиями продвинуться в изучении ее материала. А разве интерес учеников и стремление к самостоятельному продолжению занятий не является лучшим результатом преподавания?

Кроме того, предлагаемая вашему вниманию книга могла бы послужить введением в уже существующую литературу. Перечисленными в библиографическом указателе авторами (в том числе Луисом Лохер-Эрнстом, Георгом Адамсом, Эрнстом Бинделем, Германом фон Баравалем, Георгом Унгером) написаны прекрасные труды по геометрии, развитые затем учениками, в число которых входят, например, Оливер Вихер и Хайди Келлер. Автор этой книги также ощущает себя благодарным учеником вышеперечисленных авторов. Он скромно полагает, что нашел новые пути к духовной сокровищнице проективной геометрии, во многом опираясь на их работы.

Данная книга стремится дать читателю сведения, необходимые для ознакомления с работами современных авторов (Петера Гшвинда, Ренатуса Циглера и др.) и завершается экскурсом в современное состояние исследуемой области. Первый в особенности, по нашему мнению, отличается интересными подходами к рассмотрению математических и физических явлений.

В заключение я хотел бы поблагодарить всех тех, кто способствовал возникновению и написанию настоящей работы: моих прошлых и нынешних учеников, моих коллег по работе в вальдорфских школах и моих друзей из Математико-астрономической секции Гетеанума, и прежде всего ее руководителя Георга Унгера. Коллегию школы имени Рудольфа Штейнера в Базеле я хотел бы поблагодарить за предоставленный мне годичный отпуск, что только и сделало возможным появление этой книги. Особой благодарности заслуживают мои коллеги д-ра Петер Гмайндл, Петер Гшвинд и Клаус Лабудде за внимательное прочтение рукописи, а также г-жа Виола Гшвинд за тщательную сверку корректур.

Базель, весна 1984 г.

Арнольд Бернхардт

² Преподавание математики и других основных общеобразовательных предметов в вальдорфской школе (им. Рудольфа Штейнера), где работает автор этой книги, происходит в рамках учебных циклов — «эпох» — длительностью три-четыре недели, занимающих первые два часа учебного дня. Естественно, учебные предметы в течение года чередуются. — *Прим. пер.*

Ж-
ТЬ

а-

и-

о-

о-

(е-

эм

м)

и-

эм

це

о-

ое

ли

ю

ю-

ля

е-

ой

а-

т

т

т

т

т

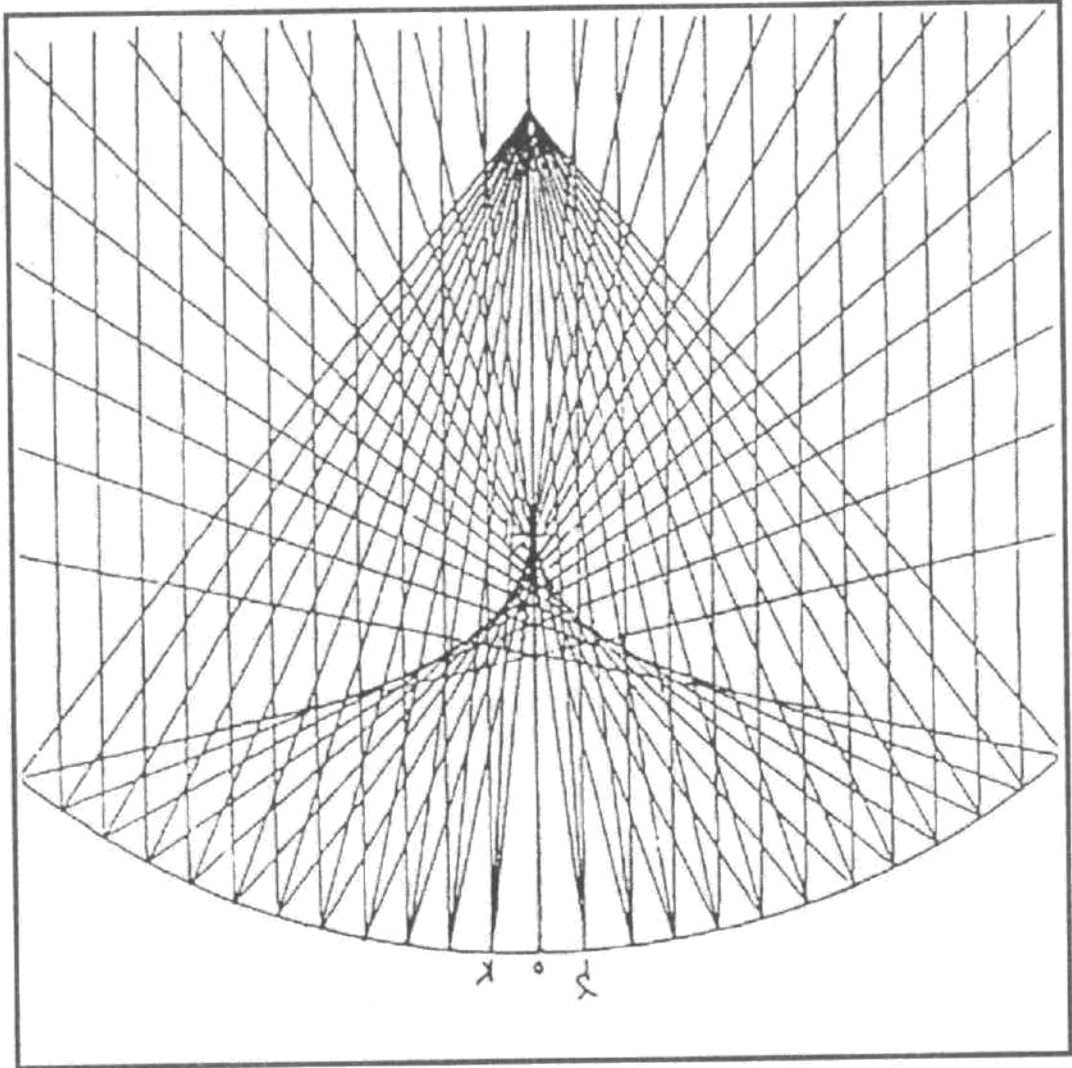
т

т

т

т

т



М.
—
Д-

1. Развитие пространственного мышления — сечения куба

Чтобы составить себе точное представление о том, как взаимодействуют в пространстве плоскости, прямые и точки, начнем наше рассмотрение с геометрического объекта, который лучше всего известен нам из повседневной жизни, а именно с куба. Мы встречаемся с ним ежедневно, причем в самых разных его видах. И поэтому простейшие наблюдения над ним не составят для нас особого труда.

Мы знаем, что у куба шесть граней, восемь вершин и двенадцать ребер. У него есть центр; в этом центре пересекаются четыре диагонали.

Куб множеством способов рассекается плоскостью на две равные части. Пример — плоскость, отделяющая правую его часть от левой (рис. 1а), или плоскость, разделяющая куб на верхнюю и нижнюю части (третий пример — на переднюю и заднюю части) (рис. 1б и 1с). Назовем эти три секущие плоскости *середиными плоскостями* куба.

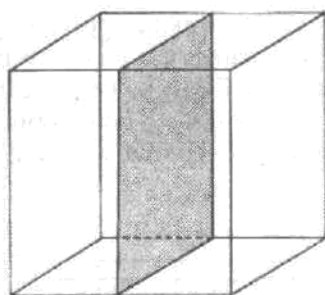


Рис. 1а

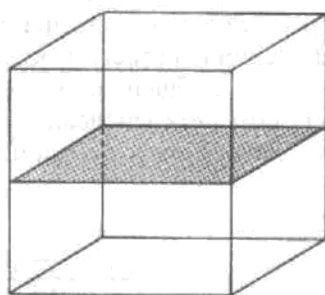


Рис. 1б

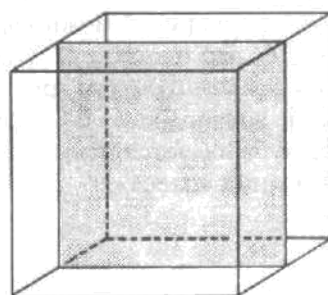


Рис. 1с

Две равные половинки возникают и в том случае, если мы делим куб диагональной плоскостью (рис. 2). Поставим ножик лезвием на диагональ FH (диагональ верхней грани куба) и произведем разрез в направлении вертикально вниз. Нож выйдет из куба по линии BD — диагонали нижней грани. Сечением является прямоугольник; его диагонали совпадают с большими диагоналями куба (FD и HB). Совершенно такой же разрез получается, если начать с диагонали EG . Вместе оба сечения порождают фигуру, изображенную на рис. 3, где указана также линия пересечения обеих диагональных плоскостей OU . Эту прямую мы назовем *плоскостной осью* куба.

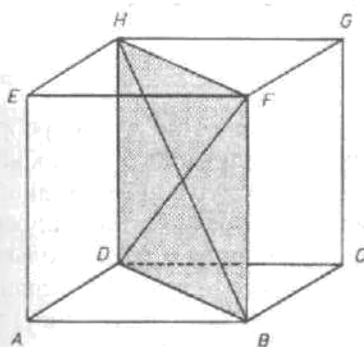


Рис. 2

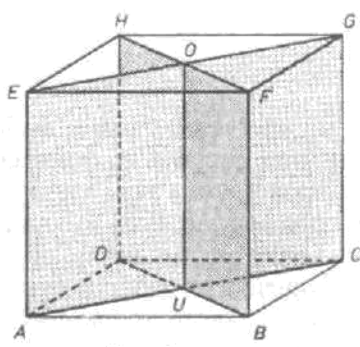


Рис. 3

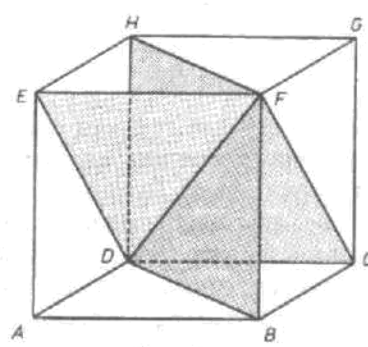


Рис. 4

Теперь можно отвлечься от представления «вещественного» куба — тела, состоящего из мягкого материала (например, глины) — и рассмотреть «реберный» куб. Диагональные плоскости превращаются в шкуры, натянутые между ребрами EA и CG и между малыми диагоналями EG и AC . Или же можно представить себе вставные цветные стеклышки. Если требуется изготовить модель фигуры, изображенной на рис. 3, то следует пересечь диагональные плоскости вдоль прямой OU , продвинув их до центра куба. Для внешнего наблюдателя диагональные плоскости отчасти скрывают друг друга. Они уподобляются указателям на развилке, насаженным на один и тот же шест, но указывающим в перпендикулярно противоположных направлениях. Таких «указателей» в кубе три; два остальных имеют горизонтальные противоположные направления. Таких «указателей» в кубе три; два остальных имеют горизонтальные противоположные направления.

Надрез можно сделать и по одному из ребер (например, спереди сверху, по ребру EF) (рис. 4); далее мы движемся вдоль малых диагоналей FC и ED наклонно, по направлению назад и вниз, и в конце

концов ножик выйдет из куба точно по ребру CD . Дорисуем к этой диагональной плоскости вторую плоскость — $FHDB$. У обеих плоскостей есть общие вершины — F и D . Значит, обеим плоскостям принадлежат и все точки диагонали куба FD ; она является линией пересечения этих двух плоскостей. Раскрасив плоскости, можно показать, какая из них и в каком месте находится ближе к нам и, следовательно, видима. Следует поупражняться в изображении таких линий пересечения двух диагоналей. Можно выбрать произвольные две из шести диагональных плоскостей куба. У них в любом случае обнаружится линия пересечения; ею будет либо диагональ куба, либо плоскостная ось. Самое лучшее — повторять такие упражнения и постепенно начертить все возможные случаи пересечения двух диагональных плоскостей! А кстати, сколько их?

Выполняя подобные упражнения, мы очень быстро замечаем, насколько интенсивнее нам начинают представляться пространственные соотношения — то, что обозначается словами «вперед-сзади», «вверху-внизу», «справа-слева». Мы внимательнее следим за ребрами, с иным чувством закрашиваем плоскости, наблюдая, как за плоскостями исчезают линии. Такими упражнениями мы укрепляем свою способность пространственного мышления, «обживаем» пространство.

В фигуру на рис. 4 можно вписать еще одну диагональную плоскость, также проходящую через диагональ FD : это плоскость $FGDA$. Выполнив соответствующее построение, мы получим рис. 5, на котором изображен пучок из трех плоскостей с общей прямой — осью FD . Глядя на него, можно представить себе водяное колесо с шестью правильно расположенными треугольными лопастями. Каждая диагональ куба является осью такого «водяного колеса». Нарисуйте второе, третье, а еще лучше, все четыре «водяных колеса»!

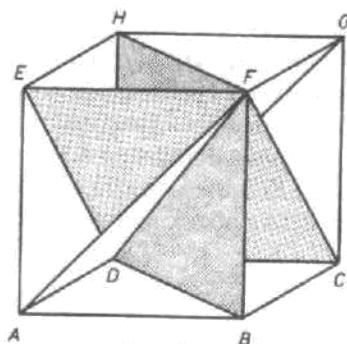


Рис. 5

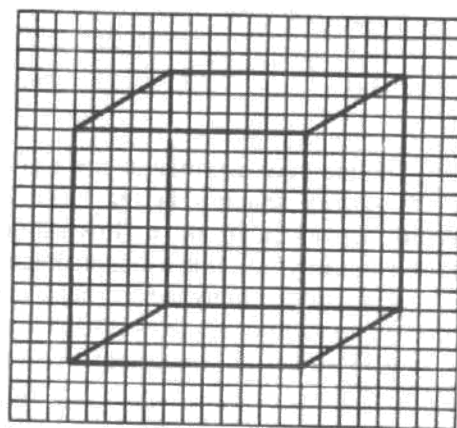


Рис. 6

Один совет для тех, кто рисует на клетчатой бумаге: выбирайте в качестве длины ребра куба 12 клеток. Задние вершины следует при этом смещать по отношению к передним на 5 клеток вправо и 3 клетки вверх (рис. 6). По опыту могу сказать, что в этом случае получается куб с превосходной «прозрачностью»: диагонали не закрывают одна другую. Если вы привыкли или предпочитаете рисовать на нелинованной бумаге, то вам достаточно один раз выполнить образцовый чертеж и затем сколько угодно переносить его с помощью циркуля и линейки на простую бумагу. За размер «клетки», в зависимости от желательного размера куба, можно принять число от 3 до 10 мм (наиболее запасливые могут заготовить целое семейство кубиков всех размеров).

Можно пересекать не две диагональные, а две срединные плоскости, как это показано на рис. 7. Получается «указатель». Кроме него существуют еще два других, опять-таки состоящих из срединных плоскостей. Если дополнить рис. 7 двумя диагональными плоскостями, получится «водяное колесо» с 8 правильно расположенными прямоугольными лопастями (рис. 8).

Три плоскости: в повседневности мы особенно часто встречаемся с взаимным пересечением трех плоскостей; примером служит любой угол в нашей комнате. Сделаем всю конфигурацию из трех плоскостей прозрачной: начертим в кубе три срединные плоскости (рис. 9). Каждая две пересекаются по прямой (плоскостной оси куба). Все три линии пересечения проходят через одну общую точку (угол комнаты) и попарно перпендикулярны друг другу. Мы видим, что точка пересечения является углом для целых восьми комнат. Для четырех из них этот угол расположен на полу, для четырех — на потолке.

С архитектурной точки зрения все эти комнаты выглядят однотипно. А что вообще можно сделать с углом комнаты? Если угол расположен у пола, то пол в любом случае должен остаться горизонталь-

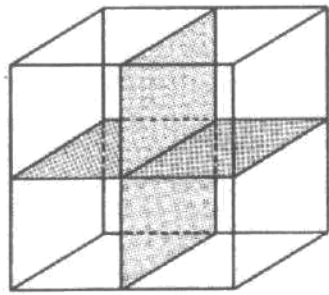


Рис. 7

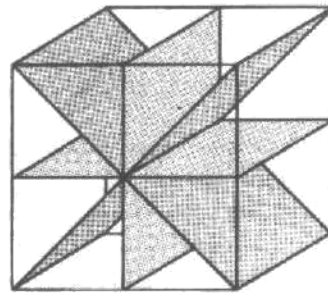


Рис. 8

ным, а стены вертикальными. В комнате с наклонными стенами мы будем чувствовать себя неуверенно. Но одно дело угол между полом и стенами, а другое — между самими стенами. Если угол верхний, то нам даже приятно, когда крыша несколько приподнимается. Наше чувство пространства интуитивно определяет, правильно ли подогнаны плоскости здания. Но как бы ни выглядел угол, три плоскости (если только это не лопасти «водяного колеса») всегда имеют одну общую точку, через которую проходят три линии пересечения трех пар плоскостей. Такую фигуру мы также будем называть *трехгранником*.

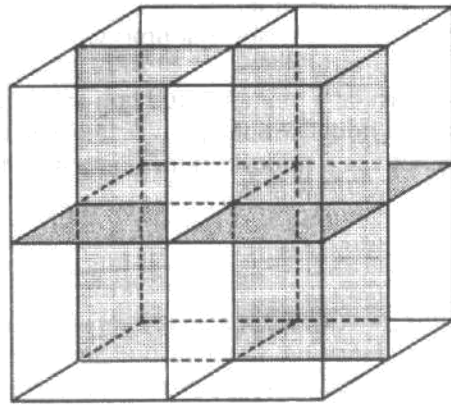


Рис. 9

Фигура на рис. 9 имеет типологический характер. Если вы выберете ее в качестве упражнения для работы на уроке, то увидите, как в процессе выполнения многие ученики начинают задумываться. Внутренне они анализируют результаты своей работы. Дав им на обдумывание и осознание увиденного ночь, на следующее утро вы столкнетесь в классе с готовностью к рассмотрению, начатым Рудольфом Штейнером в одной из его лекций, посвященных астрономии и общей антропологии³. Штейнер обращает в этой лекции внимание на то, как мы используем в физике и астрономии трехгранник в качестве системы координат. Мы ищем такое положение центра и такое направление осей, чтобы математическое решение стоящей перед нами задачи было наиболее простым. Но при этом мы не ощущаем никаких качественных отличий между различными направлениями; их можно без всякого ущерба поменять местами. В противоположность такому подходу Штейнер говорит о некоем трехграннике, с которым можно связать наш физический облик и нашу душевную активность, причем каждое направление и каждая плоскость обладают в нем своим уникальным характером.

Важнейшее значение для нашего физического облика имеет плоскость симметрии «право-лево». В соответствии с ней построено все наше тело, в особенности органы чувств (и соответственно почки, этим органам чувств родственные). Органы чувств приносят человеку переживания, пробуждающие его; именно на эти переживания натывается наше мышление, приведенное в движение усилием нашей воли. Можно понаблюдать за тем, как глубоко задумавшийся человек непроизвольно смотрит прямо перед собой, часто при этом сложив ладони точно по линии подбородок — нос, т.е. поместив их в

³ 1-я лекция цикла «Соответствия между микрокосмом и макрокосмом». Дорнах, 9 апреля 1920 года.

названной плоскости симметрии. Если мы хотим детально рассмотреть некий объект, мы встаем таким образом, чтобы он оказался в нашей плоскости симметрии и чтобы на нем пересекались наши зрительные оси. Нет никакого сомнения, что эта плоскость теснейшим образом связана с нашей познавательной жизнью.

Удивительная симметрия правой и левой половин человеческого тела — и какое различие в строении лицевой и затылочной частей головы! Позвоночник и вытянутые в стороны руки образуют плоскость, отделяющую «физиогномичную» переднюю часть нашего тела от относительно невыразительной спинной части. Когда мы хотим познакомиться с человеком, мы смотрим ему в лицо; в момент приветствия мы соприкасаемся внутренними сторонами ладоней. Именно из этой плоскости исходит наша волевая деятельность. Наш взгляд направлен вперед, мы шагаем прямо, а не назад. Если мы встречаем на своем пути преграду, мы «готовы расшибить о нее лоб». О стойком человеке говорят, что у него «есть внутренний стержень». Пока мы ощущаем названную плоскость, мы в состоянии защитить себя. Когда внутренние силы иссякают, спина сгибается и мы склоняемся к земле. Мы перестаем ощущать свою «волевую» плоскость.

Третья плоскость располагается горизонтально, на уровне гортани, проходя через вытянутые в стороны руки. На ней как бы покоится наша голова, а под ней находится наше тело. В своих лекциях перед будущими учителями вальдорфской школы Штейнер много говорил о различиях между головой и телом⁴. Третья плоскость функционально связана с нашим чувством. Можно представить себе поверхность воды — легкое дуновение приводит ее в движение, порыв ветра вызывает настоящее волнение. Однако проходит время, и все снова успокаивается. Так и жизнь наших чувств: мы реагируем с симпатией и антипатией на всякое представление, нашу душу наполняют то радость, то печаль. Когда представление обладает достаточной силой, тогда и волны наших чувств вздымаются до небес. Но ни радость, ни печаль не должны властвовать над нами; мы призваны каждый раз как бы заново находить внутренний покой.

Множество мыслей может родиться в нашей душе при взгляде на фигуру, содержащую в себе три срединные плоскости. Их можно попытаться прочувствовать, соотнести с самим собой. В упомянутой уже лекции Штейнера говорится о присутствии таких плоскостей не только в человеке, но и во Вселенной.

Задания

1. Построй линию пересечения двух произвольных диагональных или произвольных диагональной и срединной плоскостей (задание уже упоминалось в тексте).
2. К диагональным плоскостям на рис. 3 присоедини горизонтальную срединную плоскость, а к диагональным плоскостям на рис. 4 — срединную плоскость «право-лево».
3. Нарисуй три диагональные плоскости, проходящие через диагональ *НВ* («водяное колесо»), соответствующее рис. 5).
4. Построй пересечение фигуры 8 с срединной плоскостью «перед-зад».
5. Дополни «указатель» на рис. 3 еще одним «указателем» из диагональных плоскостей с плоскостной осью «лево-право».
6. Нарисуй все диагональные плоскости.
7. Нарисуй все диагональные плоскости и дополни их тремя срединными плоскостями.

⁴ См., например: Рудольф Штейнер. «Общее учение о человеке», лекции 10 – 14.

2. Подвижные представления — «пила-волчок»

В этой главе мы приведем только что добытые представления в движение. Представим себе, что внутри куба находится волчок, центр которого совпадает с центром куба. Вначале ось волчка располагается вертикально. Сам волчок представляет собой дисковую пилу, которая не просто вращается, а способна также увеличивать или уменьшать свои размеры. Пусть в первый момент диаметр диска будет достаточно небольшим (рис. 1). Волчок начинает вращаться в мягком материале куба и при этом медленно растет, так что вырез постепенно увеличивается. Наступает момент, когда диск выходит на поверхность куба в четырех точках — центрах четырех боковых граней. Диаметр продолжает расти, диск прорезывает в боковых гранях все увеличивающиеся прорезы, которые сходятся в серединах боковых ребер; в этот момент куб оказывается разрезанным полностью. Сечение представляет собой квадрат, расположенный в горизонтальной плоскости на середине высоты куба. Следует представить себе этот процесс во всех подробностях и затем попробовать мысленно повернуть его вспять.

Пусть нам разрешается свободно менять направление оси волчка — правда, только так, чтобы при этом центр волчка совпадал с центром куба. Например, представим себе, что ось вращения перемещается из центра O верхней грани немного в сторону, в направлении точки M , являющейся серединой правого верхнего ребра (рис. 2); тогда плоскость сечения поворачивается вокруг направленной на зрителя оси, и ее мгновенные положения оказываются как бы лопастями водяного колеса. Можно мысленно продолжить это перемещение оси волчка в срединной плоскости и проследить, что происходит с сечениями. Они всегда остаются прямоугольной формы, превращаясь в квадраты только в некоторых специальных случаях.

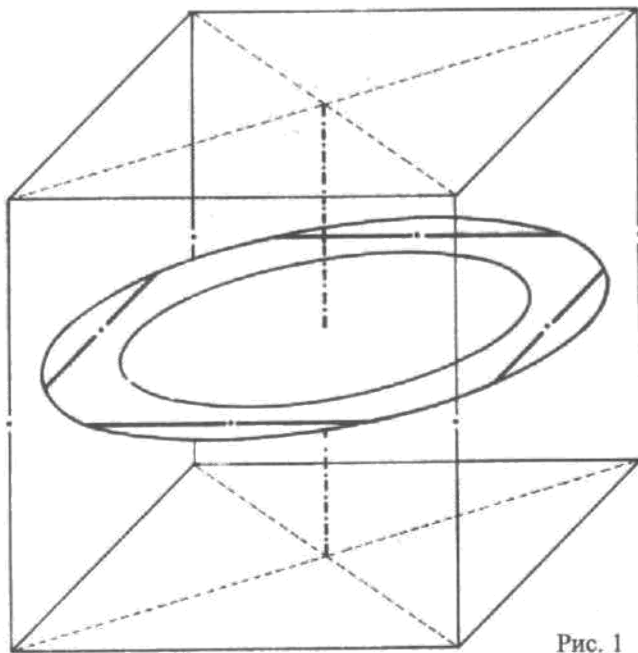


Рис. 1

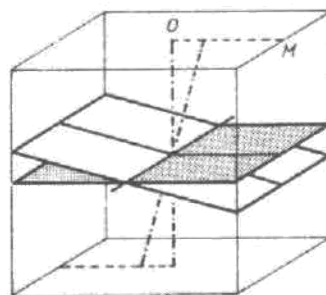


Рис. 2

А как выглядят сечения в том случае, если ось волчка движется в диагональной плоскости? Пусть ось начинает перемещаться из центра верхней грани направо вперед к вершине F . Сечения опять-таки образуют лопасти водяного колеса, ось которого совпадает с прямой линией, соединяющей середины двух вертикальных граней (рис. 3). Но само сечение оказывается уже не прямоугольной, а ромбической формы.

Ось движется к вершине F , и в какой-то момент сечение перестает быть ромбическим (две подвижные вершины как раз приходят в точки B и H). Ось волчка в этот момент точно перпендикулярна диагонали куба BH . Как только мы переступаем этот рубеж, сечение становится шестиугольником (причем неправильным, поскольку два его ребра гораздо короче четырех остальных). По мере приближения оси волчка к диагонали куба DF сечение приобретает все более регулярную форму, пока в момент совпадения с диагональю не превращается в точно правильный шестиугольник. Плоскость волчка пересекает в этот момент поверхность куба в серединах шести ребер; для того, чтобы получить сечение, остается только соединить эти точки (рис. 4а, 4б).

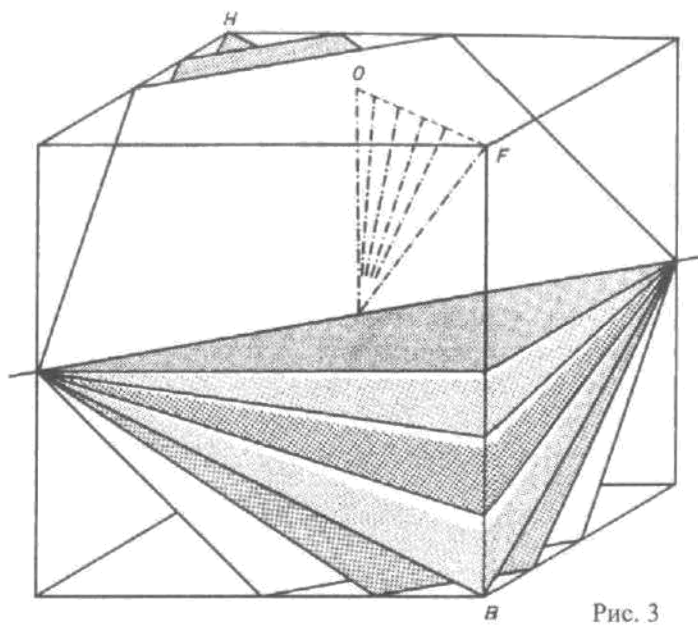


Рис. 3

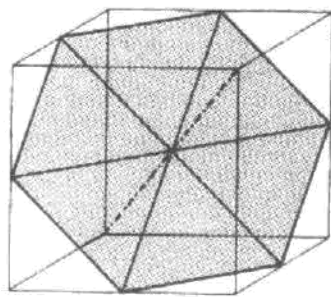


Рис. 4а

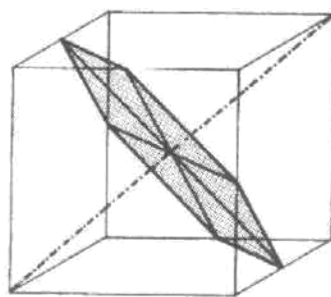


Рис. 4б

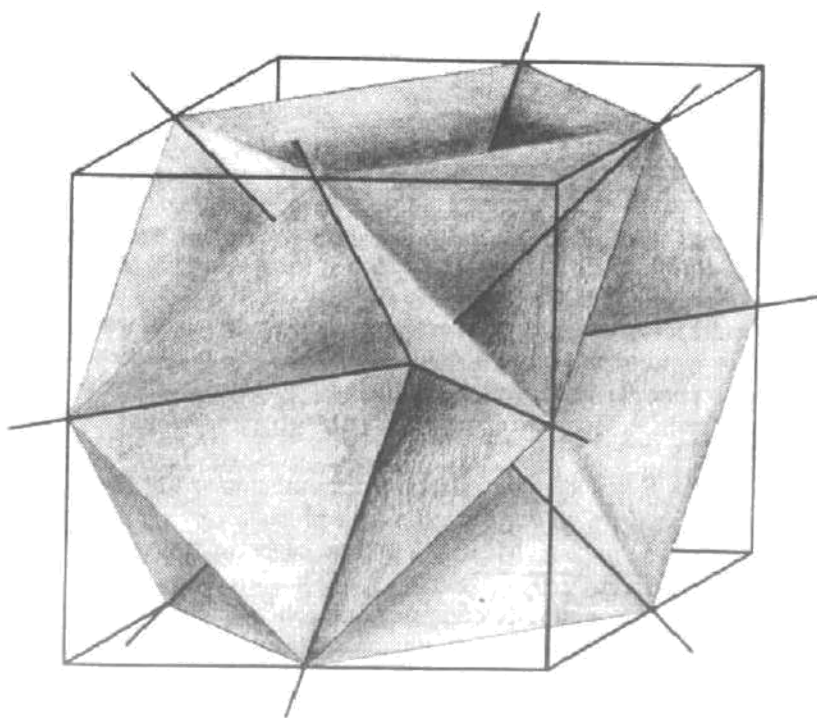


Рис. 5

Таких правильных шестиугольников имеется четыре — по одному для каждой большой диагонали куба. Плоскости, в которых они лежат, можно назвать «*серединно-перпендикулярными плоскостями*» (по отношению к диагоналям куба). Они будут играть особую роль в главе 20.

Если нарисовать все четыре «серединно-перпендикулярные плоскости» (рис. 5), то в центре куба появится правильный четырехгранник. Мы можем различить сходящиеся в центре трехгранные и четырехгранные углы. Четыре плоскости пересекаются по шести правильно расположенным прямым, проходящим через центр куба. Эти прямые соединяют середины противоположных ребер; назовем их *реберными осями* куба (рис. 6).

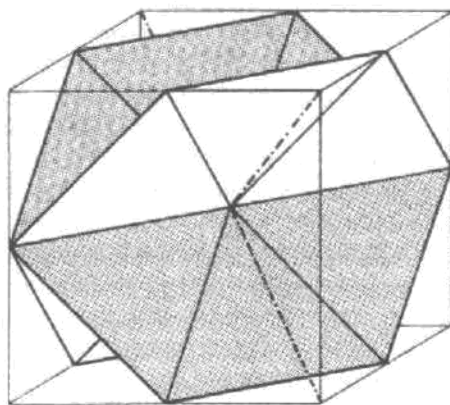


Рис. 6

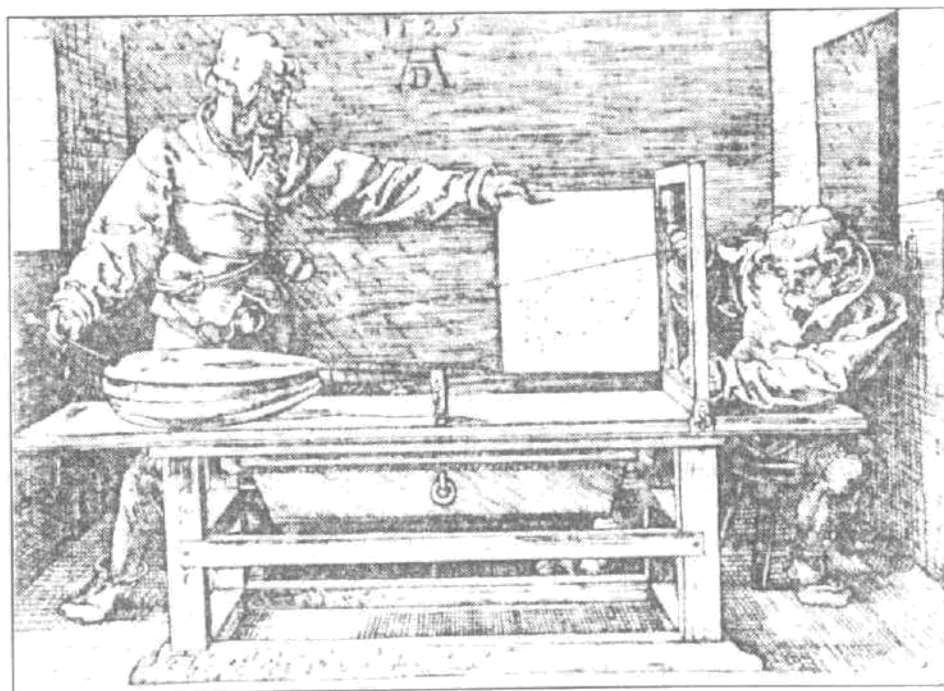
Задания

1. Нарисуй на чертеже 2 другие плоскости, которые возникают при дальнейшем движении оси волчка.
2. Нарисуй серединно-перпендикулярные плоскости к диагоналям BH и EC .
3. Найди линию пересечения серединно-перпендикулярных плоскостей, соответствующих осям AG и EC . То же самое проделай для осей BH и AG и для осей FD и AG .

3. Центральное проектирование

Все предыдущие рассмотрения происходили в духе старой, классической геометрии. Мы работали с ограниченными фигурами, все они располагались внутри некоторого куба. Однако начиная с эпохи Ренессанса геометры (и художники) все чаще работают с геометрическими объектами, выходящими за рамки конечного мира. Потребность родилась из живописи. Художники стремились к такому изображению архитектурных элементов, впечатление от которого согласовывалось бы с впечатлением от реального прототипа, и эту проблему они решали с помощью перспективы. Последующие главы покажут, что перспектива суть не что иное, как *центральное проектирование*. Альбрехт Дюрер на одной из своих гравюр наглядно продемонстрировал технику центрального проектирования.

От некоторого центра (кольца на стене) к каждой точке изображаемого предмета протягиваются нити. Между центром и предметом установлена плоскость изображения. В том месте, где нить проходит через эту плоскость, ставится точка — это образ соответствующей точки нашего предмета (называемой также *точкой-прообразом*). Так, точка за точкой, строится изображение предмета. Наш взгляд движется вдоль натянутой нити от точки предмета к точке на плоскости изображения: в результате мы переводим все точки прообраза в точки образа. Если мы поместим в центр наш глаз, то увидим, что каждая точка предмета совпадет с соответствующей точкой изображения. На языке геометрии это звучит так: множество точек-прообразов (имеющих чаще всего некоторую пространственную конфигурацию) и множество точек-образов (всегда лежащих на одной плоскости) *центрированы* друг по отношению к другу; каждый прообраз лежит вместе со своим образом на одном и том же проекционном луче, проходящем через центр. Такое отображение мы и будем называть *центральным проектированием*. Оно нам будет встречаться многократно.



* «Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und dem Richtscheit», Nürnberg 1525.

Проекционные лучи у Дюрера реализованы в виде нитей. В фотографии место нитей занимает свет. Однако процесс по сути тот же. Получив с помощью фотоаппарата диапозитив, представляющий собой образ некоторого предмета при центральной проекции, мы можем вставить его в проектор, и теперь произойдет нечто полностью противоположное: свет из центра попадает на диапозитив (диапозитив играет роль «предмета»). Каждая точка диапозитива «выносится» своим проекционным лучом и оказывается на экране, где и становится видимой. В том случае, когда плоскость экрана и плоскость диапозитива параллельны друг другу, на экране возникает простое увеличение исходной картинка. (Если же параллельность не соблюдена, то картинка на экране искажается; попробуйте — и убедитесь в этом

сами!) Если мыслить совершенно последовательно, то при таком проектировании точки на диапозитиве следует называть исходными, а точки на экране — изображениями.

Процесс проектирования — к центру или от центра — мы далее будем воспроизводить с помощью чертежей; они откроют перед нами в буквальном смысле слова новый геометрический континент.

Однако вначале давайте разрешим некоторые принципиальные вопросы. Например, в последующих главах нам неоднократно придется проектировать фигуры с вертикальной стены на горизонтальную поверхность стола. Пусть, например, на вертикальной стене — посередине — вырезано отверстие в форме равнобедренного треугольника (рис. 1). Основание равнобедренного треугольника находится точно на линии пересечения двух плоскостей. Мы будем далее называть эту линию пересечения *осью z*. Можно представлять себе треугольник и в виде цветного стеклышка. На левом краю стола, также в середине, поставим «свечу» ZZ' . Пламя этой «свечи» мы будем считать идеальным точечным источником света (в опыте он реализуется с помощью лампы, системы линз и диафрагмы).

Теперь представим себе происходящее по возможности точно и конкретно: из точки Z свет струится по всем пространственным направлениям. Мы пытаемся проследить световой поток в области стены и окна ABC . В тех местах, где свет падает на стену, он задерживается; однако окно для него не помеха. Прошедший сквозь него свет попадает на поверхность стола и порождает там изображение окна. Вершину этого изображения мы получим, если пересечем проекционный луч, проходящий через точку C , со средней линией стола. Полученную точку пересечения мы назовем центральной проекцией точки C и обозначим C' (читается « C с точкой»). Все остальные точки и прямые, принадлежащие образу, мы в дальнейшем также будем помечать точкой.

Проходящий через окно поток света порождает с правой стороны стены определенную пространственную форму, а именно пирамиду.

Пример № 2 (Сборник задач № 1): Из стены вырезан треугольник общего вида (неравнобедренный), не касающийся оси. Ребра светового потока, проходящего через отверстие, — это проекционные лучи, проходящие через вершины ABC . В каких точках они пересекают поверхность стола? Чтобы найти эти точки пересечения, попробуем, следуя Дюреру, представлять на месте лучей реальные нити. Представим себе, далее, что по этим нитям, например по нити, проходящей через точку C , начиная от точки Z , соскальзывает по направлению к поверхности стола бусинка. Пусть эта бусинка освещается точно сверху (солнце в зените). Как движется ее тень? Когда бусинка находится в исходной точке Z , тень располагается точно под ней в точке Z' (читается « Z -штрих»). Когда бусинка попадает в точку C , то тень перемещается соответственно в точку C' на оси. Название для Z' и C' мы позаимствуем из языка архитектуры: это *горизонтальные проекции* точек Z и C . Нам остается соединить данные горизонтальные проекции; по этой соединительной прямой — которую мы будем называть горизонтальной проекцией (s_c) проекционного луча s_c — и движется тень от бусинки. В точке пересечения s_c и s'_c бусинка встречается со своей тенью; там и находится C' , точка пересечения луча s_c и плоскости стола. Аналогично находятся точки A' и B' .

Световой поток, проходящий через треугольное окно, наполняет собой часть темного пространства справа от стены. Эта часть имеет форму пирамиды. Если, двигаясь вдоль проекционных лучей, мы направимся обратно к Z , то мы придем к вершине пирамиды. Впрочем, с левой стороны стены, в пространстве, наполненном светом, пирамида никак не выделяется и не видна; тут приходится мыслить ее чисто геометрически.

Продлим стороны треугольника abc до пересечения с осью и затем то же самое про-

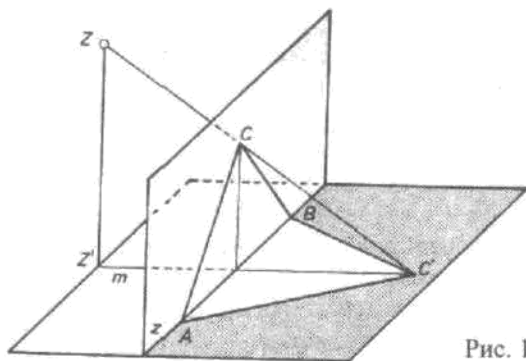


Рис. 1

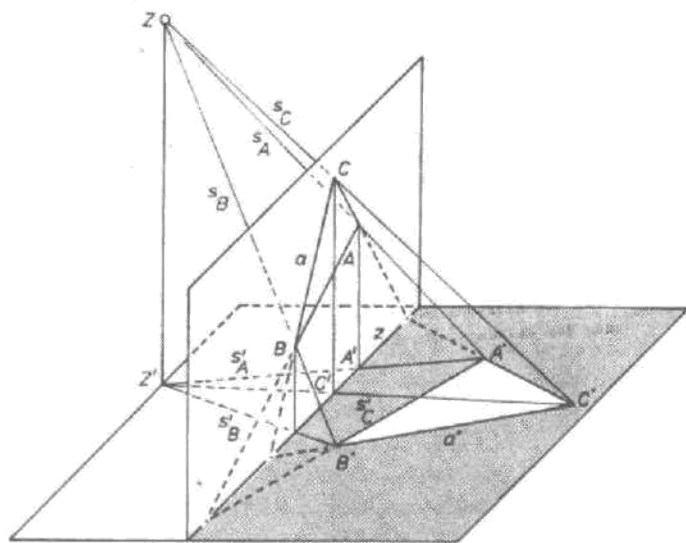


Рис. 2

делаем со сторонами a' , b' , c' треугольника-образа. Соответствующие пары прямых обязаны при этом пересечься на оси z . Действительно, представим себе, что точки прямой a (рис. 3) выколоты и через каждую проходит проекционный луч; все эти лучи лежат в одной плоскости, проходящей через прямую a и точку Z . Эта плоскость пересекает плоскость стола по прямой a' . На ней и лежат образы всех выколотых точек. Чем ближе выколотые точки расположены к оси, тем ближе к этой же оси располагаются и их образы. На оси же прообраз и образ совпадают. Рис. 3 можно интерпретировать и как изображение трехгранного угла (трехгранника), о котором шла речь в главе 1. Он образован поверхностью стола, стеной и «световой плоскостью», проходящей через прямую a . Эти три плоскости попарно пересекаются — соответственно по оси z , по прямой a и по прямой a' ; все три линии пересечения, в свою очередь, пересекаются в одной точке. Будем называть эту точку *неподвижной точкой* прямой a и обозначать F_a . Это единственная точка прямой a , которая при центральном проектировании переходит сама в себя, т.е. остается неподвижной.

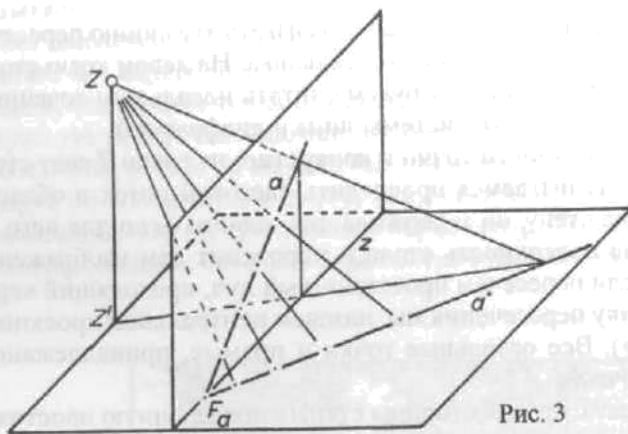


Рис. 3

находим точки B' , C' и S' . A является неподвижной точкой ($A = A'$). В целях контроля продлеваем прямые a и a' ; все правильно: они пересекаются в неподвижной точке F_a , лежащей на оси.

Пример № 3: На поверхности стола (рис. 4) стоит пирамида $ABCS$, S при этом находится точно над точкой B . Эту пирамиду необходимо спроектировать из центра Z (расположенного точно над левым краем стола) на стену. Перед нами процесс, противоположный примерам 1 и 2; речь в данном случае идет о проектировании по направлению к центру! Проведем проекционные лучи из вершин пирамиды к центру проекции. Где эти лучи пересекают плоскость проектирования? Конструкция точно обратна нашим действиям в примере 2: мы строим горизонтальные проекции s_b' , s_c' и s_s' проекционных лучей; s_b' и s_s' при этом совпадают. В точках пересечения этих лучей с осью мы восстанавливаем вертикали и затем

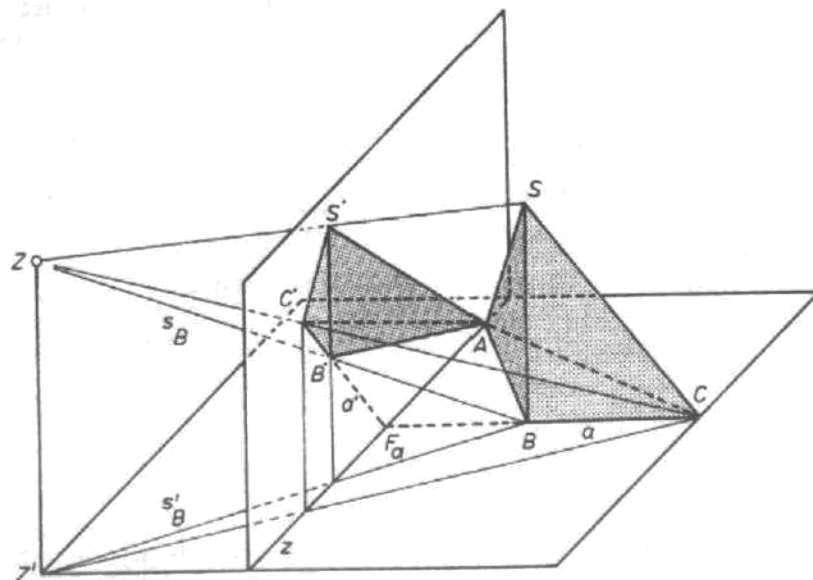


Рис. 4

4. Растущие треугольники

Представим себе, что треугольник ABC (рис. 1 предыдущей главы) начинает расти вверх, оставаясь при этом равнобедренным (Сборник задач № 1). Его вершина, таким образом, поднимается по вертикальной прямой v . Будем представлять себе этот рост постоянным и непрерывным. Процесс, естественно, можно мысленно затормозить и затем запустить снова. На чертеже (рис. 1) удастся зафиксировать только отдельные этапы этого процесса, тогда как внутреннее наблюдение вполне позволяет переходить от одного этапа к другому (приращение показано на чертеже темными и светлыми областями).

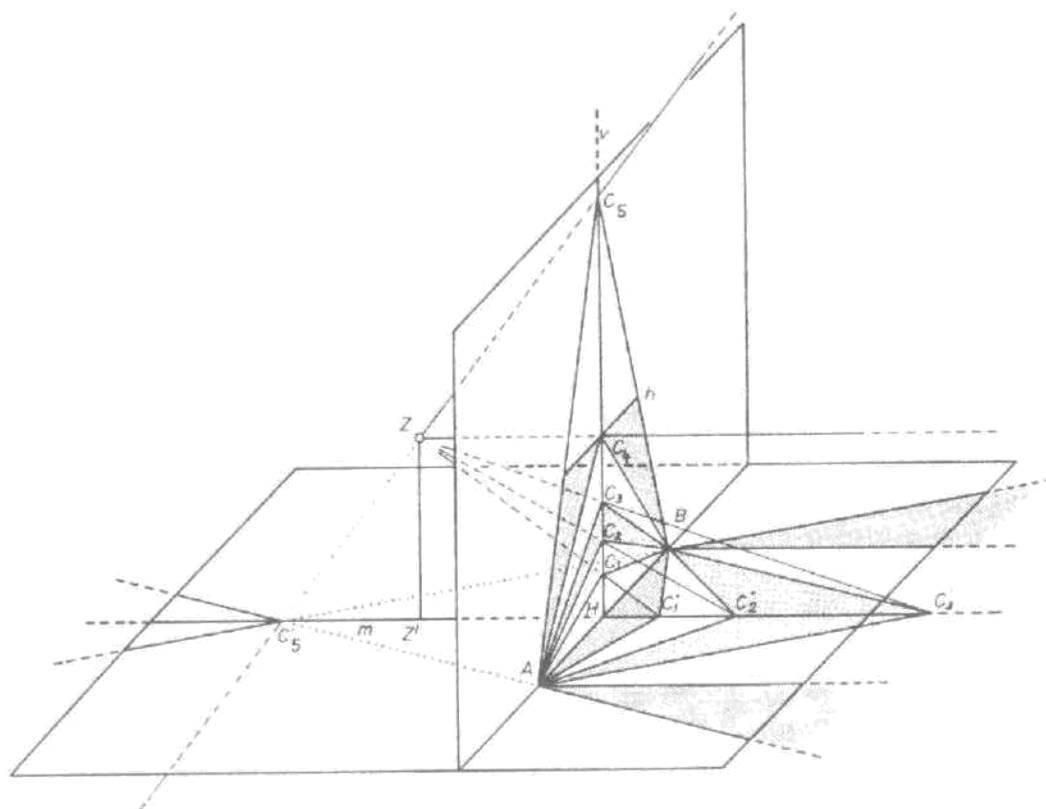


Рис. 1

Когда треугольное окно начинает расти вверх, его изображение удлиняется вправо. C движется по горизонтальной прямой, но гораздо быстрее, чем точка C движется вверх. Даже небольшой прирост высоты HC приводит к тому, что изображение выскакивает за край стола. Что ж, проследуем за точкой C мысленно. Представим себе, что поверхность стола бесконечно продолжается вправо, так что изображение треугольника может расти, как ему заблагорассудится. Мы обнаруживаем, что такой рост может продолжаться безгранично, поскольку, чем ближе точка C подходит к положению C_4 (C_4 расположена на той же высоте, что и центр Z), тем дальше вправо отодвигается вершина треугольника-образа. Что произойдет, когда точка C достигнет положения C_4 ? В этот момент проекционный луч s_4 заскользит параллельно прямой m , лежащей в горизонтальной плоскости. И боковые стороны треугольника-изображения... также окажутся параллельными прямой m . Действительно, в противном случае они должны были бы пересечься с m ; возможно, где-то очень далеко, но такая точка пересечения нашлась бы. Проекционный луч, соответствующий этой точке и, возможно, расположенный очень полого, однако, все же пересек бы прямую v где-то ниже точки C_4 . Противоречие. Значит, такая точка пересечения боковых сторон с прямой m исключена. В тот момент, когда точка C достигает положения C_4 , изображение треугольника превращается в полосу с параллельными сторонами. Эта полоса теряется в пока еще не определенной дали!

А как будет выглядеть изображение треугольника в тот момент, когда C преодолет положение C_4 и перейдет, например, в положение C_5 ? Проекционный луч будет при перемещении вправо не опускаться, а подниматься. Если мы последуем за ним, то обнаружим, что он уходит куда-то вдаль...; если же мы вернемся и пойдем в противоположном направлении, то слева от точки Z мы рано или поздно натолк-

немся на горизонтальную плоскость. Получившаяся точка пересечения окажется единственным претендентом на звание C_5 (мы должны вспомнить, что образы $C_1, C_2, C_3 \dots$ всегда определялись как точки пересечения проекционного луча с горизонтальной плоскостью). Однако возникает вопрос: что происходит с боковыми сторонами в образе пятого треугольника? В случаях 1 – 4 образы боковых сторон вращались вокруг вершин A и B , и так происходило, пока не достигалось положение, параллельно прямой m . Теперь вращение продолжается; боковые стороны становятся «сверхпараллельными», т.е. расходятся при движении вправо. Приходится возвращаться назад и именно здесь искать точку C_5 . Мы ее находим слева от Z' . Соединив C_5 с точками A и B , мы получаем стороны пятого треугольника. А что происходит с его внутренностью? При движении вправо треугольник раскрывается; так что же, следует заштриховать область ABC_5 слева от стенки? Ни в коем случае! Нам следует продлить боковые стороны далее влево за точку C_5 , вплоть до пока еще не определенной бесконечности, и между ними нанести штриховку. Чтобы понять это, представим себе горизонтальную прямую h , проходящую через точку C_5 . Она делит треугольник ABC_5 на верхнюю и нижнюю части. Всякая точка нижней части отображается вправо, поскольку соответствующий проекционный луч также склоняется вправо; наоборот, каждая точка верхней части отображается влево, поскольку ее проекционный луч склоняется влево. Чем выше прообраз находится над прямой h , тем круче опускается проекционный луч. Наиболее круто вниз проектируется сама точка C_5 — следовательно, ее образ оказывается ближе всех к стене.

Получается, что изображение пятого треугольника состоит из двух половинок: одна его часть справа, а другая — слева; между ними, где-то далеко, находится область, недоступная нашему взгляду. В эту область, кстати, вторгается и уже упомянутая нами полоса. Что с ней происходит? Может быть она там просто теряется, как теряется вода в сухих песках пустыни?

От такой неопределенности становится как-то не по себе. Нельзя ли несколько осветить эти туманные дали светом мышления? Одно, впрочем, можно сказать с уверенностью: чувственное восприятие нам здесь не помощник. Чтобы прийти к какому-то результату, нам скорее следует внутренне углубиться в рассмотрение мысленно продленной во все стороны поверхности стола. Разумеется, наше стремление достичь возможно точного наблюдения и описания чувственно наблюдаемых предметов и процессов более чем похвально. В главах с 1-й по 3-ю мы как раз и занимались преимущественно такого рода точным чувственным наблюдением. Но теперь мы должны осознать: само по себе чувственное наблюдение не дает еще никакого понимания и ничего не доказывает. Оно, однако, дает толчок деятельности мышления. Благодаря последнему мы находим понятия, для которых воспринимаемые предметы суть своего рода внешние знаки. Добытые понятия сами по себе уже являют нам определенную внутреннюю закономерность; переживание этих закономерностей и есть переживание прозрения. Если вы внимательно наблюдали предметы и затем отыскиали в своем мышлении те верные понятия, для которых исходные объекты наблюдения в большей или меньшей степени являлись «знаками», то внимание можно переключить с внешних предметов и направить его уже на сами понятия, остановить на них свой внутренний взор или, наоборот, начать переводить его с одного понятия на другое. Такую внутреннюю деятельность мы будем называть *чистым мышлением*. Именно в чистом мышлении мы и упражняемся когда занимаемся геометрией. Это чистое мышление является главнейшим плодом всех наших усилий

Как бы в последующих главах мы ни пытались прояснить туманную бесконечность, успеха мы добьемся только на ниве чистого мышления, покинув область чувственного восприятия (поверхности стола) и направив все свое внимание на сами понятия.

5. От конечного к бесконечному — прямая как целое

Итак, за что же зацепиться? Обратим наше внимание на среднюю плоскость, образованную прямыми m и v , в которой расположен центр Z и движутся точки C и C' . Пусть C перемещается из положения C_1 через C_2 и C_3 к положению C_4 ; тогда C' движется из положения C'_1 через C'_2 и C'_3 все дальше и дальше вправо. Как бы близко мы ни пододвинули точку C к C_4 , все же проекционный луч хоть слабо, но наклоняется вправо и где-то пересекает прямую m . Точка пересечения может, конечно, оказаться очень далеко, но ее удаленность от основания перпендикуляра — точки H — можно вычислить совершенно так же, как вычисляются все остальные расстояния, — в метрах. Пусть такие вычисления и не будут иметь практического характера, поскольку бесконечно длинного стола у нас никогда не будет, однако принципиально они возможны.

Все рассматриваемые нами точки пересечения лежат в *конечной* области. Затем наступает очередь особого положения C_4 , в котором проекционный луч перестает склоняться вправо, но еще не начинает склоняться влево и невозможно представить какую-либо конечную точку пересечения. Но, как только точка C хотя бы чуть-чуть переступит через рубеж C_4 , проекционный луч мгновенно начнет склоняться влево и пересекает плоскость изображения с левой стороны. Одно несомненно: в особом положении прямая s_4 не пересекает плоскость изображения в конечной области ни справа, ни слева. Если у нас есть желание исправить этот пробел (а это именно пробел, поскольку в остальных случаях каждой точке на прямой v до и после положения C_4 соответствует в конечной области некоторый образ), то мы должны понимать, что этот образ бессмысленно искать в конечном; в области конечного у нас находятся изображения точек перед (под) и после (над) положения C_4 .

Но нельзя ли к «конечным» точкам присоединить точки нового типа, так сказать, *не конечные*? Этому новому типу можно было бы дать свое название — «бесконечно удаленных точек». Все перечисленные выше геометрические факты подводят нас, по сути подталкивают к образованию этого нового понятия.

Сняли ли мы тем самым неопределенность? Для внутреннего созерцания — и это является единственно важным — да! От точки H мы отходим через лежащие справа в конечной области на все большем удалении от H точки C'_1, C'_2, C'_3, \dots , минуем точку в бесконечности, C'_4 , и затем с левой стороны через точки, лежащие на конечном расстоянии, снова приближаемся к H . Бесконечно удаленная точка является общей точкой прямых s_4 и m . Интересно, что эта же точка принадлежит двум параллельным прямым, ограничивающим полосу. Общая бесконечно удаленная точка двух параллельных прямых играет в случае этих прямых такую же роль, как и лежащая в конечной области точка пересечения двух обычных прямых. Поскольку с функциональной точки зрения это все та же точка пересечения, часто, упоминая о бесконечно удаленной точке, говорят о «точке пересечения» двух параллельных прямых. Однако, пользуясь таким оборотом, необходимо сознавать, что пересечения в обычном смысле, т.е. в конечной области, в данном случае не существует.

Но как быть с распространенным возражением, что, мол, эта бесконечно удаленная точка по сути «вымышленна»? Конечно, она «вымышленна», но ведь и остальные точки тоже «вымышленны»! Понятия суть нечто такое, что в принципе относится к области мышления. Можно представить себе маленький стальной шарик. Это именно шарик, а не точка. Даже если его радиус начинает уменьшаться, все равно шарик остается шариком. Шарик можно уменьшать и дальше, пока он, так сказать, не стянется до центра. Но центр с самого начала имел понятийную природу, был «чисто вымышленным». Отличие состоит в том, что ограниченный отрезок, например от H до C'_3 , мы в состоянии вместить в свое обычное сознание, чего нельзя сказать об отрезке от H до C'_4 . Здесь должно вступить в свои права внутреннее созерцание. В последующих главах мы неоднократно сможем убедиться в том, как домысливание таких бесконечно удаленных точек (а затем и остальных бесконечно удаленных элементов) придает всему зданию геометрии известную завершенность; в противном случае остаются пробелы и исключения. В данном, рассматриваемом нами, случае добавление бесконечно удаленной точки порождает взаимно однозначное соответствие между точками прямой v и прямой m . Каждой точке на прямой v соответствует одна и только одна точка на прямой m , и наоборот. Эта законченность удовлетворяет нашему эстетическому восприятию.

Как бы все это ни было прекрасно, но мы должны быть готовы отказаться от новых понятий, как только увидим, что они приходят в противоречие со старыми.

В прошлом и нынешнем столетии были подробно и тщательно исследованы логические взаимосвязи в понятийном здании геометрии. Геометры систематически свели каждую теорему к небольшому набору простейших утверждений, истинность которых видна непосредственно и поэтому не должна опираться на еще более простые факты. Такие простейшие утверждения называются *аксиомами*. В качестве аксиом могут, например, выступать следующие утверждения: через две точки можно провести

одну и только одну прямую; или: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость. Доказать какое-либо утверждение — значит логически свести его к таким простейшим фактам, аксиомам.

Легко увидеть, что бесконечно удаленные точки (а также другие бесконечно удаленные элементы, с которыми мы еще познакомимся) совершенно так же включаются в систему аксиом, как и конечные элементы. Поэтому противоречий вследствие появления бесконечно удаленных элементов появиться не может. Последовательное сведение всех теорем проективной геометрии к системе аксиом вы найдете, например, в книге «Проективная геометрия» Луиса Лохер-Эрнста.

6. Ряды точек и пучки прямых как объекты чистого мышления

Давайте внимательно посмотрим на соответствие между точками прямой v и точками прямой m . Прямая v также имеет бесконечно удаленную точку V_∞ (∞ означает «бесконечный»), которая отображается в точку V' , находящуюся точно под Z (рис. 1). Мысленно повернем луч вокруг центра Z , начиная с положения ZO (O — точка пересечения прямых m и v). Пусть луч вращается против часовой стрелки с постоянной скоростью. Теперь представим себе, насколько различна в разные моменты времени скорость движения точек пересечения этого луча с прямыми m и v . Точка пересечения с прямой v медленно поднимается вдоль своей прямой до положения M (ранее мы обозначали эту точку C_4), тогда как соответствующая точка на прямой m все быстрее и быстрее исчезает в бесконечности. Пройдя через M , точка пересечения с прямой v , ускоряясь, движется в направлении к бесконечности, тогда как соответствующая точка на прямой m появляется из бесконечности с левой стороны и постепенно замедляет свой ход. Затем точка пересечения с прямой v появляется снизу, причем ее движение замедляется, а точка пересечения с прямой m проходит отрезок от V' до O , постепенно ускоряясь. При проходе через бесконечность обе точки движутся с бесконечной скоростью.

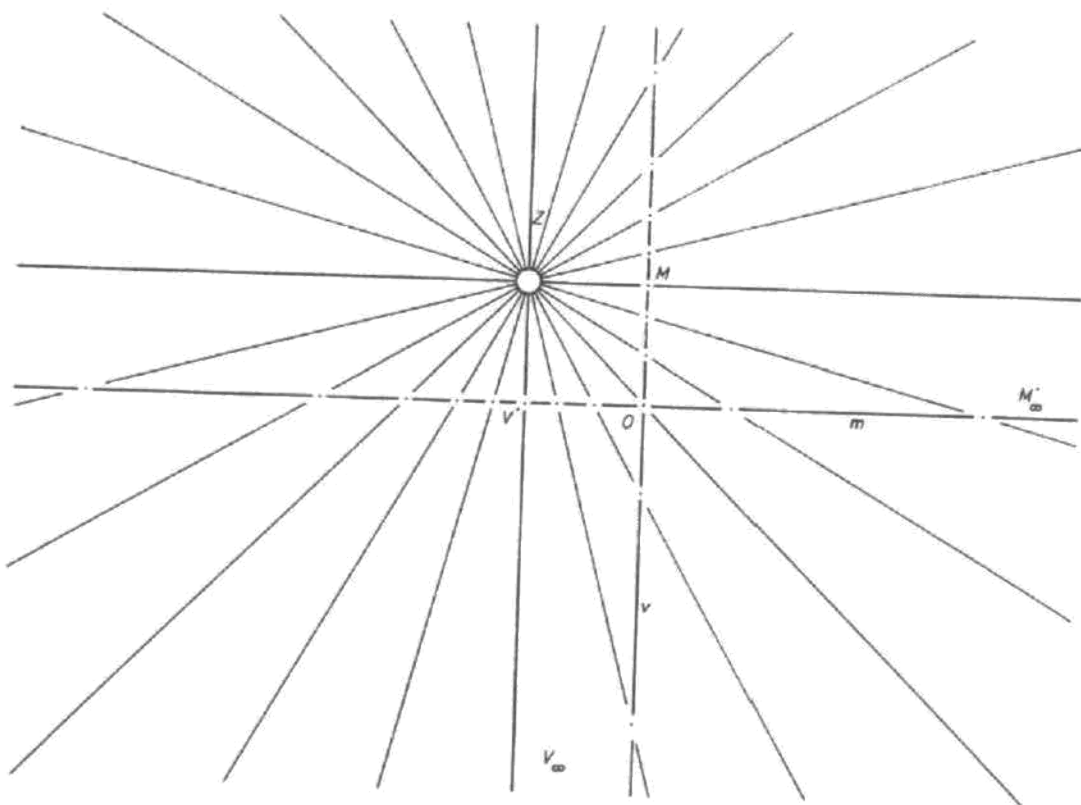


Рис. 1

Будем представлять себе движение луча и движение точек по прямым v и m как непрерывные процессы. Луч проходит *все множество* возможных лучей с началом в точке Z ; точки пересечения проходят *все множество* точек на прямых v и m . Множество прямых, проходящих через Z , мы назовем *пучком прямых* с центром Z ; множества точек на прямых v и m мы назовем *рядами точек*. Оба объекта — и ряды точек, и пучки прямых — суть чисто мыслимые образования. Их можно мыслить — но нельзя изображать. Изображать можно только отдельные элементы — отдельные прямые или отдельные точки. Прямые, на которых находятся ряды точек, мы будем называть *носителями рядов*; точка Z , через которую проходят все прямые пучка, мы назовем *носителем* или *центром* пучка. Оба объекта (не только ряды точек, но и пучки прямых) *одномерны*. Конечно, прямые пучка лежат в плоскости, и сама эта плоскость, естественно, *двумерна*. Однако совокупность всех прямых одного пучка *одномерна*: любая прямая может пробежаться по всем прямым пучка по часовой или против часовой стрелки, равно как и

любая точка может пробежаться по ряду в том или в другом направлении. Итак, ряды точек и пучки прямых суть одномерные *фундаментальные объекты*.⁵

Описанное выше соответствие между точками двух рядов v и t посредством пучка прямых с центром Z мы назовем *перспективным преобразованием* точечных рядов друг на друга.

В Приложении к данной главе показано, как производить вычисления, связанные с перспективными преобразованиями.

Когда в последующих главах мы выработаем представление о *целостной плоскости*, нам станет понятно, как устроены совокупности точек и совокупности прямых на этой плоскости.

Приложение

Представим себе, что прямые t и v играют роль координатных осей x и y (рис. 2). Пусть центр пучка прямых имеет координаты $(-3, 4)$. Из подобия треугольников POP' и $ZZ'P'$ следует:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{x+3} \quad \text{выражаем } y \text{ и получаем: } y = \frac{4}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{Решаем относительно } x: \quad & yx + 3y = 4x \\ & 3y = 4x - yx \\ & 3y = x(4 - y) \\ & x = \frac{3y}{4 - y} \end{aligned}$$

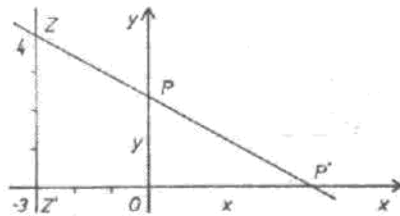


Рис. 2

Вот таблица значений x как функции от y (см. также рис. 3):

y	0	1	2	3	5	6	7	8	9	...
x	0	1	3	9	-15	-9	-7	-6	-5 2/3	...

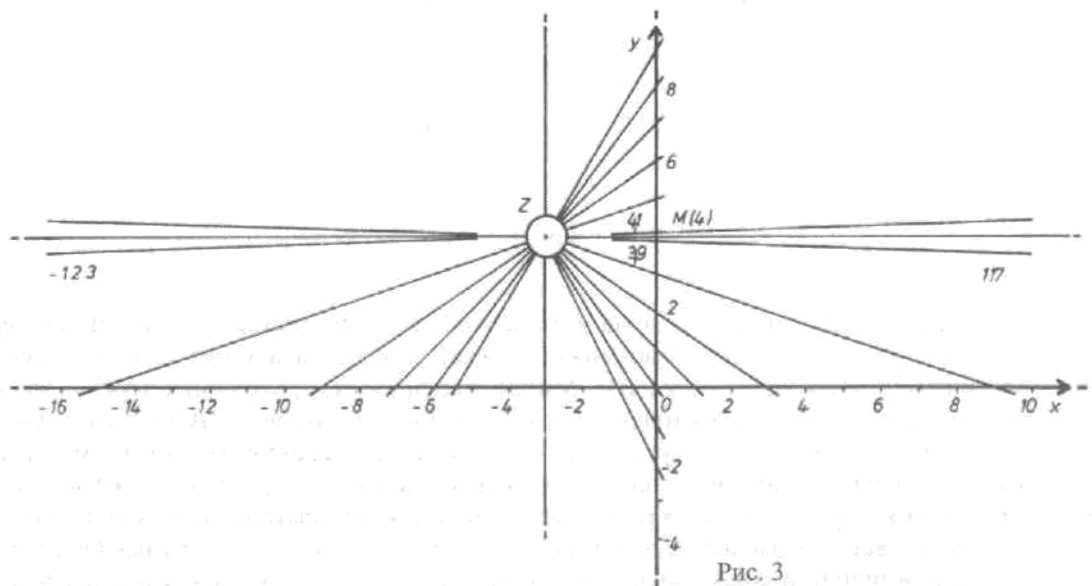


Рис. 3

⁵ Другой принятый термин – *основные формы (образы) первой степени* на плоскости. — Прим. пер.

Приведем еще две последовательности значений в окрестности $y = 4$ (снизу и сверху):

y	3,9	3,99	3,999	3,9999	...	предельная точка M
x	117	1197	11997	119997	...	предельная точка M_{∞}
y	4,1	4,01	4,001	4,0001	...	предельная точка M
x	-123	-1203	-12003	-120003	...	предельная точка M_{∞}

Из этой таблицы можно заключить, что при приближении y к 4 x уходит в (плюс и минус) бесконечность.

Интересно также составить таблицы значений y при приближении x справа и слева к значению -3 .

7. Плоскость как целое

В двух предыдущих главах мы пытались внутренне представить себе прямую линию как *целое*. В данной главе мы подойдем с этой же точки зрения к *целой* плоскости.

Вначале еще одно мысленное упражнение с прямой. Представим себе, что над прямой g находится точка Z и в ней два «указателя» (рис. 1); один из них пусть будет вращаться по часовой стрелке, а другой — в противоположном направлении. Они вращаются с одинаковой скоростью и одновременно проходят через положение ZS_0 ; таким образом точки их пересечения с прямой g симметрично приближаются к S_0 справа и слева, причем все быстрее и быстрее, если принять, что указатели вращаются с постоянной угловой скоростью. В один и тот же момент времени указатели оказываются на горизонтальной прямой h ; их точки пересечения с прямой g в это мгновение совпадают и оказываются в бесконечно удаленной точке прямой g . Затем они снова появляются из бесконечности, двигаясь все медленнее и медленнее, пока не совпадут в S_0 ; и затем их движение снова ускоряется.

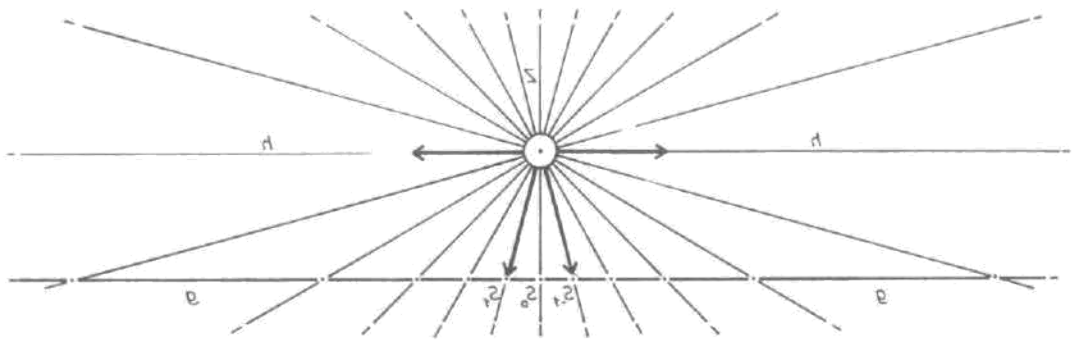


Рис. 1

Чтобы создать внутреннее представление о плоскости в целом, предположим, что фигура на рис. 1 вращается вокруг оси ZS_0 . Прямая g замечает при вращении горизонтальную плоскость, оба указателя — круговые конусы; эти круговые конусы вырезают на горизонтальной плоскости концентрические окружности (рис. 2). Когда угол при вершине кругового конуса (точнее, его половина) стремится к значению 90° , окружности становятся все больше и больше, но при этом они почти теряют кривизну. В пределе ($\alpha=90^\circ$) конус превращается в плоскость, параллельную нашей горизонтальной плоскости. Будучи плоскостью, она может пересекаться с нашей исходной плоскостью только по прямой. Но эта

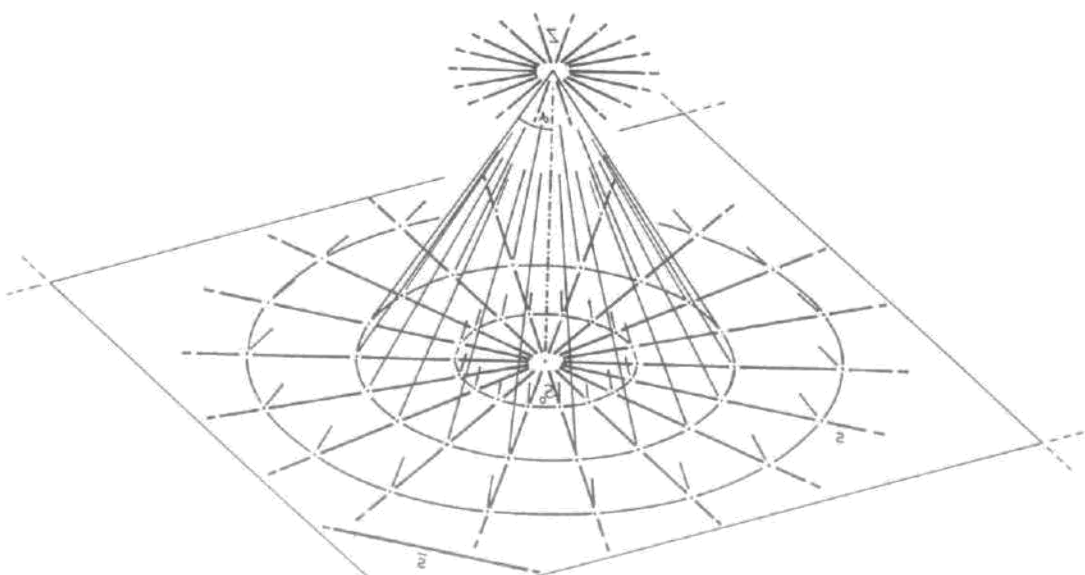


Рис. 2

прямая не может лежать в конечной области; дело в том, что лежащая в конечной области прямая, соединенная с Z , даст нам наклонную, а вовсе не параллельную горизонтальной плоскости. Значит, общая прямая должна находиться бесконечно далеко, поэтому ее называют бесконечно удаленной прямой g_∞ плоскости. Именно к ней стремятся растущие окружности.

Рассмотрим некоторое количество плоскостей, проходящих через ось ZS_0 (на рис. 2 показаны 9 таких плоскостей). Они высекают на горизонтальной плоскости по одной прямой, проходящей через S_0 , а на поверхности конуса — по две образующие. В каждой плоскости эти образующие совпадают с указателями рис. 1. Когда угол при вершине конуса начинает расти и приближается к 180° , в каждой из плоскостей происходит то же самое, что и на рис. 1: обе точки пересечения симметрично расходятся в разные стороны от S_0 . Указатели из разных плоскостей относятся при этом к одному и тому же конусу. Именно диаметрально противоположные точки кругового сечения этого конуса и расходятся в разные стороны. Когда все указатели оказываются в горизонтальной плоскости, тогда и диаметрально противоположные точки всех лучей пучка, проходящего через S_0 , совпадут с бесконечно удаленными точками соответствующих прямых, причем все пары движущихся точек во всех направлениях достигнут бесконечно удаленных точек одновременно. Еще раз обратим внимание, что в граничном случае они уже не могут лежать на окружности, поскольку тогда «окружность», будучи пересечением двух плоскостей, не имеет никакой кривизны. Итак, если мы рассматриваем бесконечно удаленные точки всех направлений плоскости, то все их можно мыслить точками некоей прямой, а именно бесконечно удаленной прямой g_∞ этой плоскости.

Прямая g_∞ имеет с каждой прямой плоскости ровно одну общую точку. Рассмотрим произвольную прямую \bar{s} вне пучка, проходящего через S_0 : в пучке обязательно найдется прямая s , параллельная ей; тогда \bar{s} пересекает g_∞ в той же бесконечно удаленной точке, что и s . Все остальные прямые, параллельные s и \bar{s} , проходят через ту же бесконечно удаленную точку, образуя так называемый пучок параллельных.

Чтобы прийти к представлению о том, что такое все пучки параллельных прямых, еще раз спроектируем треугольники из вертикальной в горизонтальную плоскость (рис. 3 и Задание № 1). Пусть вершины A, B, C, \dots вертикальных треугольников все лежат на одной и той же высоте, соответствующей высоте центра Z . Тогда все они отобразятся в бесконечно удаленные точки. Соответствующие пучки прямых с центрами в A, B, C, \dots превратятся в пучки параллельных прямых с центрами $A_\infty, B_\infty, C_\infty, \dots$. Когда проекционный луч пробегает последовательность точек A, B, C, \dots , центр пучка параллельных прямых пробегает точки бесконечно удаленной прямой. Ряд точек g отображается в ряд бесконечно удаленных точек.

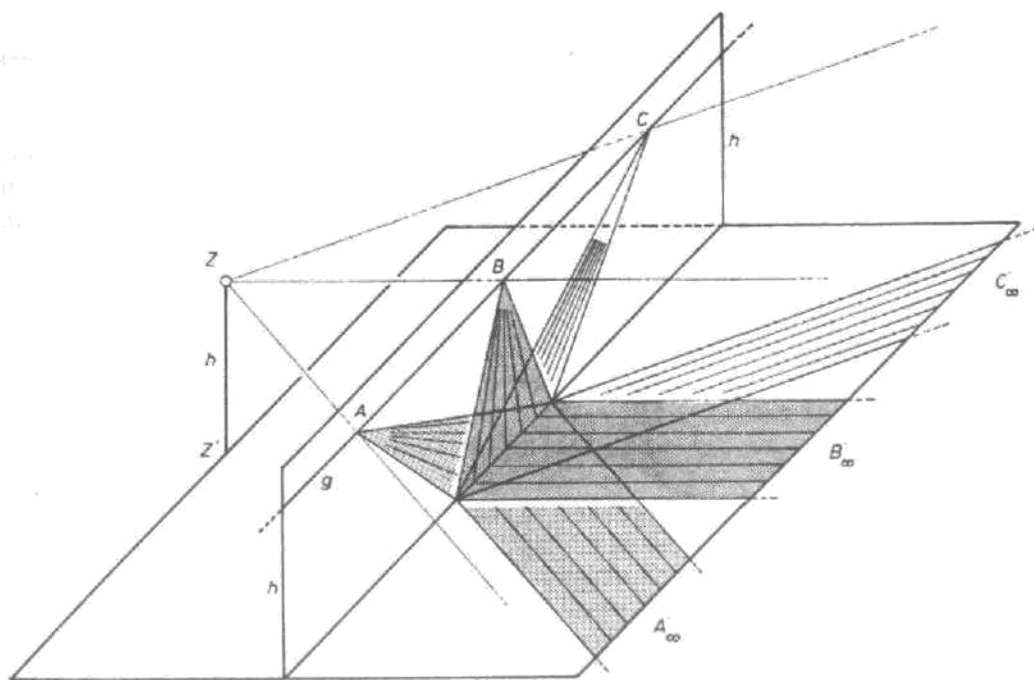


Рис. 3

Впрочем, с одной точки зрения последовательность бесконечно удаленных точек отличается от соответствующей последовательности конечных точек: оказывается, что она не имеет определенного направления! Как мы приходим к такому заключению? Элементы одного и того же пучка параллельных прямых имеют нечто общее, а именно общее направление. Это общее направление мы можем заменить на общую бесконечно удаленную точку. Каждая бесконечно удаленная точка представляет собой некоторое направление. Но поскольку g_{∞} содержит не только одну, но и вообще все бесконечно удаленные точки, сама она не может иметь определенного направления.

К такому же выводу приводит нас и рассмотрение процесса роста окружностей. Обратим внимание не только на точки, но и касательные к ним. Касательные перемещаются вовне параллельно самим себе (рис. 4). Увеличиваясь, окружности все теснее прилегают к своим касательным. В граничном случае и окружность, и касательные стремятся к g_{∞} . А поскольку среди касательных есть все возможные направления, получается, что g_{∞} соединяет все эти направления в себе.

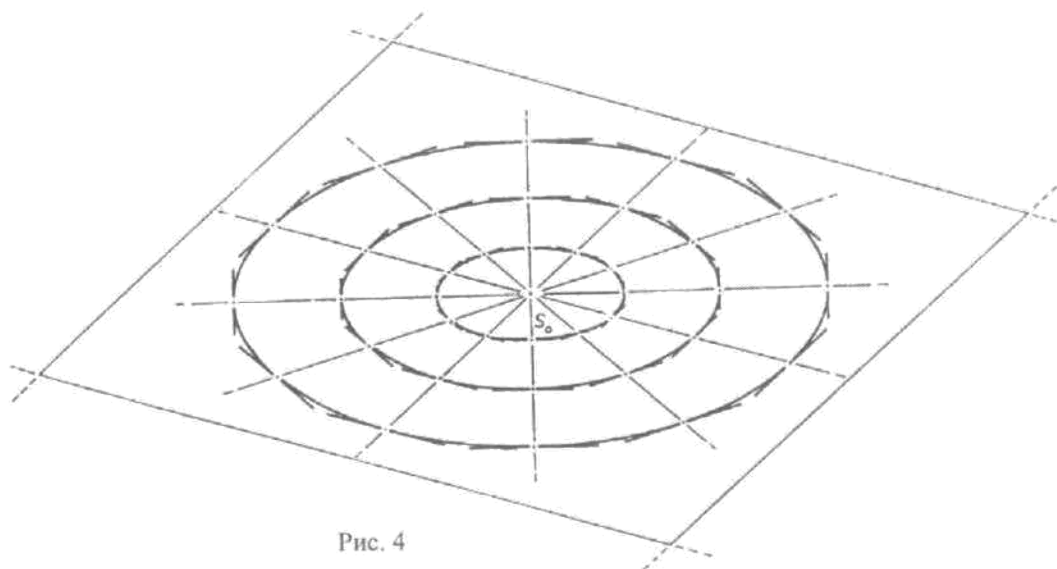


Рис. 4

Позже, развив теорию центральной проекции, мы получим в конечной области образ этого процесса соединения окружности, касательных и g_{∞} (см. рис. 22, гл. 25).

В конце — одно методическое замечание. Поначалу мы — и это совершенно естественно — сомневаемся в правомерности таких понятий, как «бесконечно удаленная точка» и «бесконечно удаленная прямая». Уверенность достигается, только когда мы подходим к предмету с самых разных точек зрения и раз за разом обнаруживаем согласованность подходов. Рудольф Штейнер часто указывал на то, что подобным же образом мы можем убедиться в правомерности результатов духовно-научных исследований. Да, эти результаты могут быть получены только с помощью методов высшего познания; но, когда они получены, можно продумать их с самых разных, взаимно дополняющих позиций.

8. Двумерные объекты — поля и связки

Рассмотрение растущих окружностей (рис. 4 предыдущей главы) дает нам некоторое представление о *совокупности всех прямых на плоскости*: вначале пучок с центром S_0 , затем маленькие окружности с центрами в S_0 со всеми касательными к ним, которые растут, превращаясь в конце концов в бесконечно удаленную прямую. *Совокупность всех прямых некоторой плоскости мы назовем полем прямых*: это все конечные прямые плюс бесконечно удаленная прямая.

Если вместо касательных мы рассмотрим точки, мы получим представление о *совокупности всех точек некоторой плоскости*: это конечные точки плюс множество бесконечно удаленных точек. Такую совокупность мы назовем *полем точек*. Если мы одновременно представим себе поле прямых и поле точек одной и той же плоскости, мы получим просто *плоское поле*. Это поле является ареной плоской геометрии (планиметрии).

На рис. 2 предыдущей главы мы наблюдали не только растущие окружности, но и растущие конусы. Из этого рассмотрения мы можем выудить еще три объекта. Представим себе *все* плоскости, проходящие через ось ZS_0 (лопасти водяного колеса), а не только 9 плоскостей, изображенных на рисунке, причем плоскости во всей их полноте. Совокупность этих плоскостей назовем *пучком плоскостей*. Этот пучок высекает на горизонтальной плоскости другой пучок прямых — с центром S_0 . Хотя пучок плоскостей вписан во все пространство, но тем не менее он представляет собой одномерное множество: его можно «пролистать» в одном из двух направлений, как мы это делали с пучком прямых, проходящих через S_0 .

Теперь представим себе множество всех образующих, проходящих через точку Z . Пока конус растет от оси S_0Z , постепенно расширяясь и наконец превращаясь в горизонтальную плоскость (проходящую через Z), множество образующих пробегает всю совокупность прямых линий, проходящих через точку Z . Эту совокупность прямых мы будем называть *связкой прямых (пространственным пучком)* с носителем в Z (с центром Z). Связка *двумерна*, она пересекает горизонтальную плоскость (а также любую другую плоскость, которая не проходит через точку Z) по полю точек; это множество точек также двумерно.

Всякий конус имеет не только образующие (прямые), но и касательные (плоскости). Касательные плоскости касаются поверхности конуса вдоль образующих. Пересекая горизонтальную плоскость, они образуют на ней множество касательных к окружности — соответствующему коническому сечению. Опять-таки будем представлять себе касательные плоскости бесконечными. Пусть конус, как и прежде, растет. В этом случае касательные плоскости «пробегут» все положения, которые только может занимать плоскость, проходящая через точку Z . Совокупность этих плоскостей мы назовем *связкой (пространственным пучком) плоскостей* в точке Z . Данное множество плоскостей *двумерно*. Оно пересекает горизонтальную плоскость (да и любую другую плоскость, не проходящую через Z) по полю прямых; естественно, это поле также двумерно.

Представим себе одновременно множество всех прямых и множество всех плоскостей, проходящих через некую точку. Назовем эту совокупность *связкой точки*. Внутри связки можно строить систему геометрии; в противоположность геометрии плоскостной данную геометрию мы будем называть *центральной*. Рассмотренные нами конусы относятся к центральной геометрии; с иными примерами такого рода геометрических объектов мы еще успеем познакомиться.

Все описанные выше множества точек, прямых и плоскостей мы относим к *основным объектам пространства*. В следующих главах станет постепенно понятно, почему они действительно заслуживают такого наименования.

Чтобы не перепутать пучки и связки, достаточно запомнить, что связки являются двумерными, а пучки — одномерными.

Иногда говорят, что в пучке ∞^1 (бесконечность в первой степени) прямых, а в связке — ∞^2 (бесконечность в квадрате). В равной степени это относится к множествам точек: в *ряду* ∞^1 точек, а в *поле* — ∞^2 . Что позволяет нам таким образом выражаться?

Выберем в ряду точек произвольную точку O и назовем ее *нулевой* точкой, а также некоторую другую произвольную точку E и назовем ее концом единичного отрезка (рис. 1). Теперь мы можем определить удаленность любой точки P от точки O , измерив ее в единицах $e = OE$, и приписать точке P в качестве координаты полученный коэффициент x . Тогда одно-единственное число x характеризует положение точки P в данном ряду точек. Этот факт позволяет нам говорить, что количество точек в ряду равно бесконечности *в первой степени*.

Если же мы хотим теперь определить с помощью координат положение точки в поле точек (рис. 2), то нам потребуются *два* значения, например прямоугольные координаты x и y , почему мы и говорим, что в поле точек имеется ровно бесконечность в квадрате объектов.

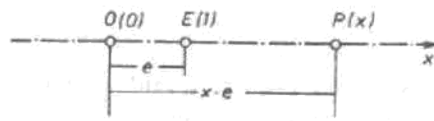


Рис. 1

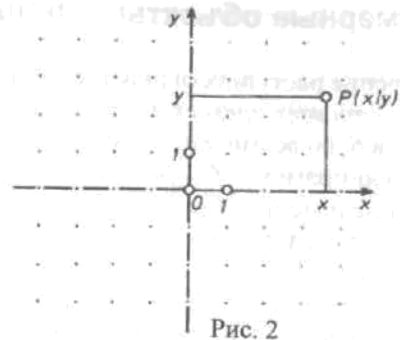


Рис. 2

В пучке прямых на рис. 3 положение любой прямой можно определить с помощью *одного* угла α , который образован данной прямой и некоторым произвольно выбранным нулевым направлением; значит, в пучке ∞^1 прямых.

В связке (рис. 4) для определения положения прямой требуется, напротив, *два* угла. Нужно выбрать произвольную плоскость в качестве нулевой плоскости O и в ней произвольный луч в качестве нулевого луча o . Ортогональную проекцию прямой s на O обозначим s' . После такой подготовительной работы можно определить положение s в нашей связке с помощью двух углов. Один угол α это угол между o и s' , а второй угол β это угол между s' и s . В этом смысле в связке ровно ∞^2 прямых.

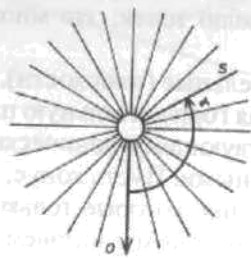


Рис. 3

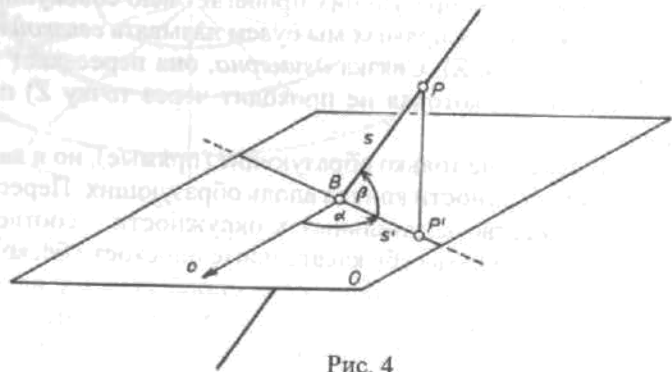


Рис. 4

Положение некоей плоскости в пучке плоскостей определяется *одним* углом (отсчитываемым от нулевой плоскости). В пучке ∞^1 плоскостей.

В связке плоскостей с центром в некоторой точке, напротив, ∞^2 элементов, равно как и в поле прямых некоторой плоскости.

Основные элементы с ∞^1 числом элементов мы будем называть *одномерными*, а с ∞^2 — *двумерными*.

(Для тех, кто знаком с теорией множеств, заметим, что понятие размерности в данном случае отличается от понятия мощности множества.)

9. Пространство как целое

Вместо растущих концентрических окружностей можно рассмотреть растущие концентрические сферы. В граничном случае ($r = \infty$) сферическая поверхность теряет свою кривизну и сплавляется со своими касательными плоскостями в *бесконечно удаленную плоскость* пространства. Эта плоскость вбирает в себя все *положения*, каждое из которых представлено парой диаметрально противоположных касательных плоскостей. Она содержит оси всех пучков параллельных плоскостей и центры всех связок параллельных прямых. В этом отношении бесконечно удаленная плоскость является особым полем пространства.

Еще раз рассмотрим растущие концентрические сферы вместе с принадлежащими им точками и касательными к ним плоскостями. На старте все точки собраны в одном общем центре, а все касательные плоскости образуют единую связку. На «финише» все касательные плоскости попадают на бесконечно удаленную плоскость, а точки сферы образуют точечное поле этой плоскости. При этом в процессе роста точки заполняют все пространство, а касательные плоскости пробегают все возможные (для плоскости в пространстве) положения. Совокупность всех точек пространства мы будем называть *точечным пространством*, а совокупность всех плоскостей — *плоскостным пространством*. Оба множества *трехмерны*. В процессе роста точки сферы движутся по лучам связки прямых с центром в Z , а касательные плоскости вращаются вокруг своих бесконечно удаленных осей. Прямых в связке ∞^2 ; на каждой прямой ∞^1 точек: итого $\infty^2 \cdot \infty^1 = \infty^3$ точек всего пространства. Бесконечно удаленных осей у пучков параллельных плоскостей ∞^2 ; на каждую ось «нанизано» ∞^1 плоскостей: итого $\infty^2 \cdot \infty^1 = \infty^3$ плоскостей во всем пространстве. Положение точки в пространстве также характеризуется тремя координатами x, y, z .

Если представлять себе не только точки и касательные плоскости, но в каждой точке еще и пучок прямых, касательных к сфере, то прямые всех этих пучков в процессе роста пробегут все возможные положения, которые прямая может занимать в нашем пространстве. Совокупность этих прямых мы назовем *пространством прямых*. Оно не трех-, а четырехмерно. Во время роста движутся не просто отдельные прямые, а целые пучки. Как-то представить себе это пространство можно, домыслив к каждой точке плоского точечного поля еще и связку прямых. Точек в поле ровно ∞^2 , в каждой точке еще ∞^2 прямых: итого $\infty^2 \cdot \infty^2 = \infty^4$ прямых во всем пространстве. Другая структуризация того же пространства: в каждой плоскости некоторой связки плоскостей (∞^2 плоскостей) нужно представить себе поле прямых (∞^2 прямых).

Пространство прямых богаче пространства точек и пространства плоскостей. В нем больше возможностей: две прямые, например, могут скрещиваться, но лежать в разных плоскостях (т.е. не иметь точек пересечения) и проходить мимо друг друга, подобно тому как проходят по разноразмерной развязке две железнодорожные линии. Две прямые могут быть инцидентными, т.е. лежать в одной плоскости и иметь общую точку пересечения. С двумя точками и двумя плоскостями все гораздо проще: две точки всегда имеют соединяющую их прямую, а две плоскости — прямую пересечения.

Обычно мы представляем себе только конечные фрагменты пространства. Так поступают даже те, кто в силу своей профессиональной деятельности обладает хорошо развитым представлением о взаимном расположении плоскостей, прямых и точек. Благодаря нашим рассмотрением мы увидели пространство в целом. На простом геометрическом примере мы пережили расширение сознания. Рудольф Штейнер описал методы укрепления нашей познавательной деятельности, которые позволяют сознанию расширяться до пределов, первоначально ускользающих от переживания. А поскольку наше бытие переплетено с множеством таких не вполне прозрачных для нас областей, приходится признать, что только такое расширение сознания позволит нам найти ответы (в том числе и практические) на обступающие нас со всех сторон жизненные загадки.

10. Обзор основных элементов — двойственная структура

Пространства прямых, точек и плоскостей переплетены друг с другом. В нашем внутреннем восприятии мы можем высветить любое из них, отвлекшись от прочих элементов.

Представим себе, например, пространство прямых. Выделим одну из точек и сделаем ее носителем (центром). Она обособит в совокупном пространстве прямых связку — множество всех тех прямых, которые проходят через данную точку. Представим себе этот объект максимально конкретно. Теперь оставим на некоторое время сформированное представление и в качестве носителя выберем не точку, а плоскость. Плоскость вычленил из пространства прямых поле — совокупность всех прямых, лежащих в данной плоскости (прямая лежит в плоскости, когда она подобна тростинке, плавающей на поверхности озера).

Будем систематически представлять себе одно из трех пространств и затем выделять в качестве центра или носителя некий элемент из двух других пространств (табл. 1).

Таблица 1

	Пространство точек	Пространство прямых	Пространство плоскостей
4-мерное пространство			
3-мерные пространства			
2-мерные основные объекты			
1-мерные основные объекты			

Единственное исключение — плоский пучок прямых: его образуют два элемента — одна плоскость и одна лежащая в ней точка.

В нашей таблице собрано все, начиная с четырехмерного пространства прямых и кончая одномерными объектами.

В такой систематизации чувствуется определенный порядок. Точки и плоскости зеркально противоположны, прямые при этом как бы живут сами по себе. Особенно ясно эта структура выступает, когда мы пытаемся охарактеризовать основные объекты в словесной форме (табл. 2).

Таблица 2.

Множества		
В пространстве точек	В пространстве прямых	В пространстве плоскостей
<i>Поле точек:</i> совокупность всех точек, лежащих в одной плоскости	<i>Связка прямых:</i> совокупность всех прямых, проходящих через одну точку	<i>Связка плоскостей:</i> совокупность всех плоскостей, проходящих через одну точку
<i>Ряд точек:</i> совокупность всех точек, лежащих на одной прямой	<i>Пучок прямых:</i> совокупность всех прямых, проходящих через одну точку и лежащих в одной плоскости	<i>Пучок плоскостей:</i> совокупность всех плоскостей, проходящих через одну прямую

Можно взять и в любом предложении заменить слово «точка» на слово «плоскость» и, наоборот, слово «плоскость» на слово «точка»; при этом нужно также поменять местами словосочетания «лежащих в (на)» и «проходящих через», а прямую не трогать. Из каждой такой замены рождается двойственное положение, симметричное исходному относительно оси таблицы. Пример:

Поле точек: Совокупность всех точек, лежащих в одной плоскости.

Произведем замену: Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну точку (т.е. связка плоскостей).

Если произвести замену в определении пучка прямых, то получится: совокупность всех прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну точку. (То же самое!)

Такое зеркальное соответствие называется *двойственностью*. О соответствующих объектах при этом говорят, что они друг другу *двойственны*. Среди основных элементов двойственными являются:

Поле точек	двойственно	связке плоскостей
Связка прямых	двойственна	полю прямых
Ряд точек	двойствен	пучку плоскостей
Пучок прямых	двойствен	пучку прямых

В ходе наших дальнейших рассмотрений мы увидим, что двойственность является структурным принципом, пронизывающим всю геометрию.

Семь основных объектов пространства составляют в совокупности некий организм. Это подтверждается и тем, что их взаимодействие порождает снова те же основные объекты.

Пример 1: Представим себе поле точек и вне этого поля точку P . Точка P может быть соединена с каждой точкой нашего поля одной-единственной соединительной прямой. Все соединительные прямые образуют связку прямых с центром в P . Говорят, что эта связка является *образующей* для нашего поля точек.

Двойственный пример: Представим себе связку плоскостей и вне ее еще одну плоскость — E . Эта плоскость E пересекается с каждой плоскостью связки по некоторой прямой. Все такие прямые образуют поле прямых в плоскости E . Говорят, что это поле прямых является *сечением* связки плоскостей.

Понятия «пересечение» и «соединение», «сечение» и «образующая» двойственны друг другу.

Пример 2: Представим себе ряд точек и некую прямую g , скрещивающуюся с прямой, являющейся их носителем. Прямая g может быть объединена с каждой точкой нашего ряда единственной общей плоскостью. Все такие плоскости образуют пучок плоскостей с осью g . Он является образующим пучком для нашей последовательности точек.

Двойственный пример: Представим себе пучок плоскостей и некую прямую g , скрещивающуюся с прямой, играющей в нем роль оси. Прямая g имеет (единственную) точку пересечения с каждой плоскостью нашего пучка. Все эти точки пересечения образуют ряд точек g — сечение нашего пучка плоскостей.

Как можно заметить, второй пример двойствен сам себе.

Рассмотренное нами двойственное соответствие называют *двойственностью в пространстве*. Мы увидим, что существуют также двойственные отношения в поле и в связке.

В заключение еще раз перечислим фундаментальные двойственные соответствия в пространстве:

Прямая	двойственна	прямой
Точка	двойственна	плоскости
«лежит на (в)»	двойственно	«проходит через»
соединить (образующая)	двойственно	пересечь (сечение)

Задания к теме «Образующие и сечения»

Пересеки:

1. Связку прямых с плоскостью
2. Пучок прямых с плоскостью
3. Поле прямых с плоскостью
4. Связку плоскостей с плоскостью
5. Пучок плоскостей с плоскостью
6. Пучок плоскостей с прямой
7. Связку плоскостей с прямой
8. Пучок прямых с прямой
9. Поле прямых с прямой

Соедини (двойственное задание):

- Поле прямых с точкой
- Пучок прямых с точкой
- Связку прямых с точкой

Самостоятельно составь двойственное задание к заданиям с 4-го по 9-е. Сформулируй условия, необходимые для того, чтобы задания имели смысл; например, задание 8 осмысленно только в том случае, когда прямая лежит в плоскости пучка, но сама не принадлежит ему.

Центральная проекция плоского поля на другое плоское поле, кстати, является не чем иным, как работой с образующими и сечениями.

11. Центральная перспектива

На уроках черчения и рисования мы знакомимся с законами перспективы: правильное изображение параллельных ребер некоторого тела подразумевает, что их продолжения стремятся к общей *точке схода*. Если тело является домом, то существенные точки схода лежат на некоторой горизонтально прямой, *линии горизонта*, проходящей на уровне глаз наблюдателя. Мы заучиваем эти правила и затем просто выполняем все требуемые задания, чаще всего не задумываясь над геометрической подоплекой происходящего. И для уроков в каком-нибудь 7-м классе этого совершенно достаточно.

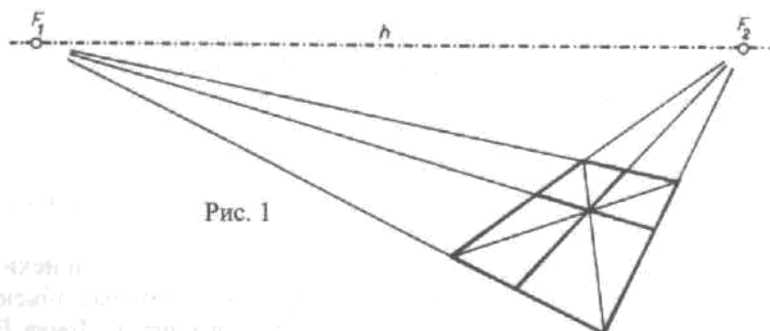


Рис. 1

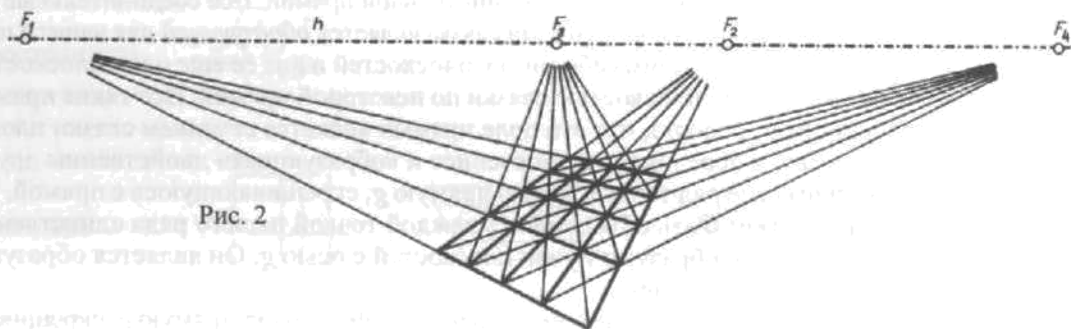


Рис. 2

Пусть нам требуется нарисовать перспективное изображение «шахматной доски» (рис. 1). В этом случае мы должны выбрать линию горизонта h и на ней две точки схода, F_1, F_2 , и сделать так, чтобы края доски (точнее, их продолжения) сошлись в этих точках. Затем доска делится с помощью диагоналей на четыре равных поля. В этих четырех полях мы снова проводим диагонали (рис. 2); поскольку в настоящей шахматной доске они параллельны, то в перспективном изображении они должны сходиться в точках F_3 и F_4 , также лежащих на линии горизонта. Повторение процедуры с диагоналями может добавить рисунку деталей. При этом обнаруживается, что возникающая сетка перерастает пределы шахматной доски.

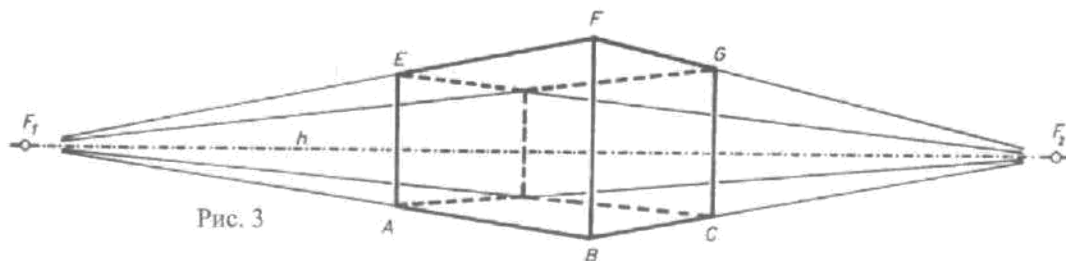


Рис. 3

Или перспективное изображение куба (рис. 3): снова на линии горизонта выбираются две точки схода F_1 и F_2 . Предположим, что дано переднее вертикальное ребро BF , а также боковые ребра BA и BC . Остальные ребра можно построить с помощью точек схода. Когда нужно приделать к кубу еще и крышу (рис. 4), тогда мы просто строим с помощью диагоналей вертикальные средние линии обеих боковых граней. Высота крыши либо берется произвольно, либо определяется оценкой конкретной ситуации.

браже-
точке
альной
и затем
плекой

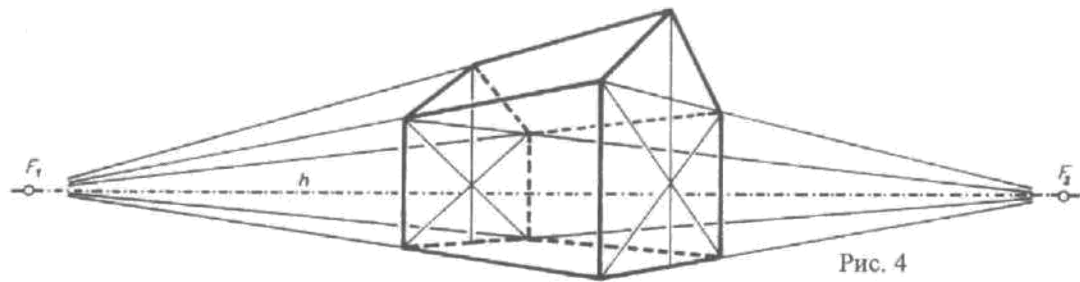


Рис. 4

Такова практика выполнения чертежей, и она ставит перед нами множество вопросов. Почему необходимо выбрать линию горизонта и точки схода? Какие элементы должны быть изначально заданы?

Проработанный в предыдущих главах геометрический материал позволяет пролить свет на эти вопросы. Ключом для понимания перспективы является центральная проекция. Два примера призваны проиллюстрировать это положение:

Задание 1: На горизонтальной поверхности стола лежит «шахматная доска». Ее нужно спроектировать из точки Z на вертикальную плоскость! Наилучший результат достигается в том случае, когда читатель вначале пытается справиться с заданием самостоятельно и только затем обращается к сопроводительному тексту и рассматривает готовый чертеж (рис. 5).

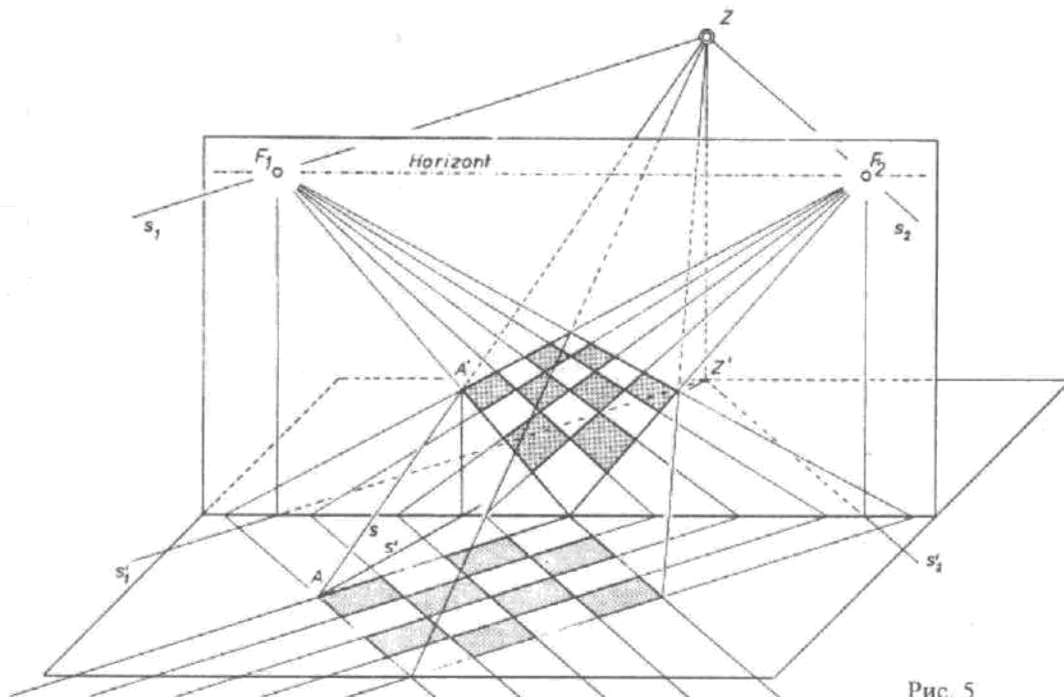


Рис. 5

Само собой разумеется, через углы шахматной доски следует провести проекционные лучи. Точки, в которых эти лучи пронзают вертикальную плоскость, можно отыскать, проектируя лучи на горизонтальную плоскость (соответствующее построение приведено для точки A). Однако лучше представить себе, что края и промежуточные параллельные линии шахматной доски продлены в бесконечность: возникают два пучка параллельных прямых, центрами которых являются две бесконечно удаленные точки. Кстати, через эти бесконечно удаленные точки проходят проекционные лучи s_1 и s_2 . Они идут над поверхностью стола параллельно краям шахматной доски. Точки, в которых проекционные лучи пересекают вертикальную плоскость, мы отыщем с помощью проекций s_1' и s_2' . Это F_1 и F_2 , которые и являются центрами образов соответствующих пучков. Эти образы можно получить, продлив параллельные линии на шахматной доске вплоть до пересечения с осью и затем соединив точки пересечения (неподвижные точки) с F_1 и F_2 .

этом
гобы
она-
у на
ить-
жет
пах-

ики
ЗС.
шу
ых

Рисунок, возникающий на вертикальной плоскости (недостающие диагонали можно достроить по же), в точности соответствует перспективному изображению на рис. 2! F_1 и F_2 являются точками схода, они суть изображения бесконечно удаленных точек параллельных прямых нашей шахматной доски. Горизонт? Он является изображением бесконечно удаленной прямой горизонтальной плоскости.

Итак: Точки схода и горизонт суть изображения бесконечно удаленных элементов.

Задание 2: Нарисовать в вертикальной плоскости центральную проекцию параллелепипеда! Укажите: Представьте себе, что горизонтальные ребра параллелепипеда продлены вплоть до бесконечности (два пучка параллельных), и постройте образы их центров (это — точки схода). Образ точки можно найти с помощью соответствующего проекционного луча и его проекции на горизонтальную плоскость. Чертеж выходит за рамки намеченной вертикальной плоскости (готовый рис. 6). А где же находится точка схода F_3 вертикальных ребер? Она сама лежит в бесконечности, поскольку вертикальные ребра параллельны плоскости изображения. Если бы плоскость изображения была несколько наклонена вперед или назад, то образы вертикальных ребер имели бы конечную точку пересечения: на поверхности стола — в случае наклона вперед и под — в случае наклона назад.

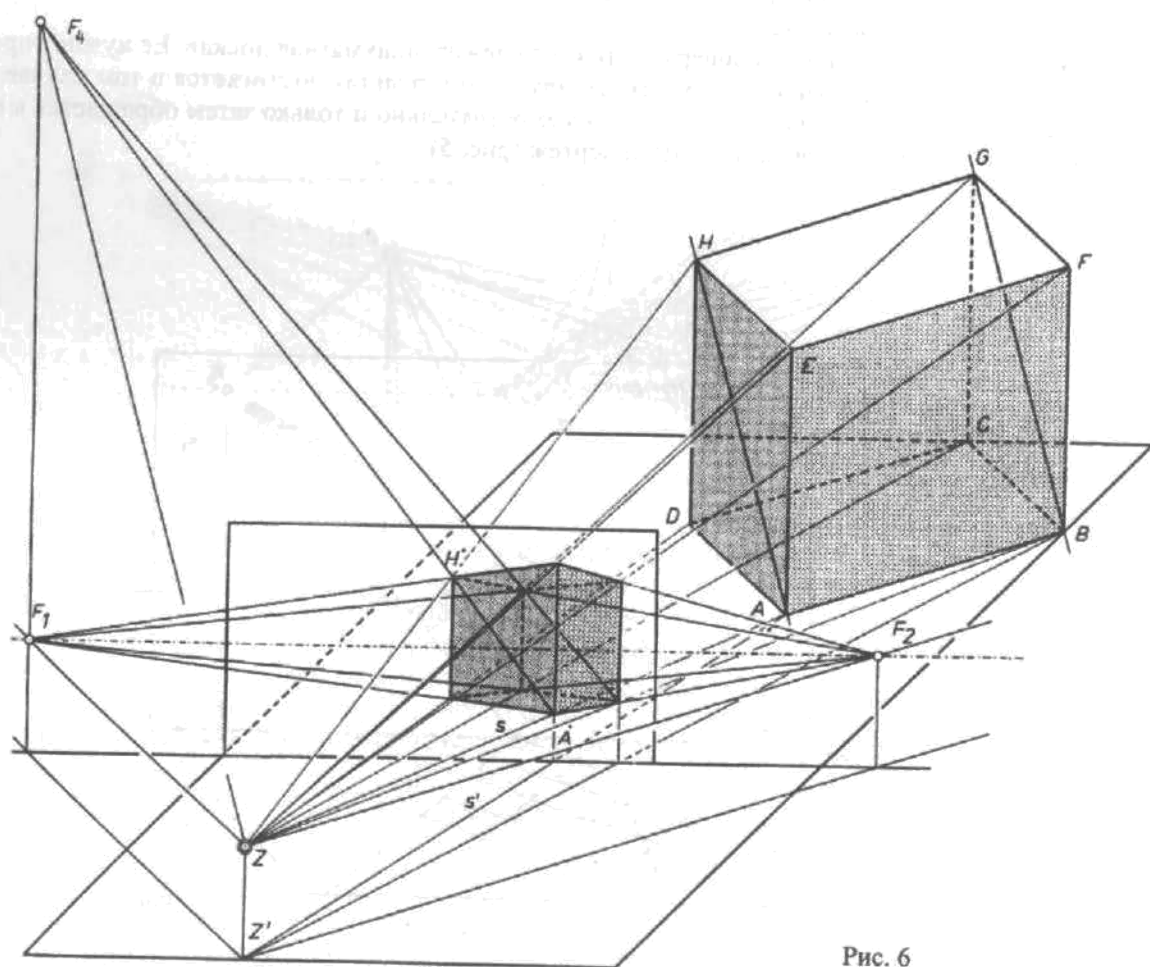


Рис. 6

На рис. 6 изображена также точка F_4 схода диагоналей AH и BG . Оказывается, не все точки схода лежат на линии горизонта! Здесь окажутся только образы центров тех пучков параллельных прямых, которые сами параллельны горизонтальной плоскости.

Итак, перспективное изображение в принципе является центральной проекцией. Если даны объект, плоскость чертежа и центр проектирования, то можно не делать никаких дополнительных предположений; перспективное изображение определено теперь совершенно однозначно. На рис. 7, исходя из вида сбоку и вида сверху, построено перспективное изображение дома. Сами виды в данном случае располагаются на непривычных местах: вид сверху дан наверху, а вид сбоку — слева. При этом виды и перспективное изображение не соотношены друг с другом вспомогательными линиями. Плоскость изображения, на которую центрально проектируется дом, располагается вертикально и проходит через ребро BF .

ь поз-
схода;
ки. А

Ука-
ечно-
ки А
ьную
е же
каль-
о на-
над

В виде сверху можно отыскать только ее след E' . Построение изображения вначале выполняется на виде сверху простым соединением точек с проекцией (видом сверху) Z' центра проектирования. Прямые s_1 и s_2 соединяют центр Z с бесконечно удаленными точками ребер. Высоту ребра BF мы можем узнать из вида сбоку. Линия горизонта проходит через боковую проекцию Z' центра; положение точек схода мы берем из вида сверху. Положение конька JK можно найти, продлив его в виде сверху и отыскать пересечение с плоскостью изображения E . Поскольку точка пересечения S лежит в плоскости изображения, она и в центральной проекции оказывается на своей истинной высоте, которую мы можем просто позаимствовать из вида сбоку.

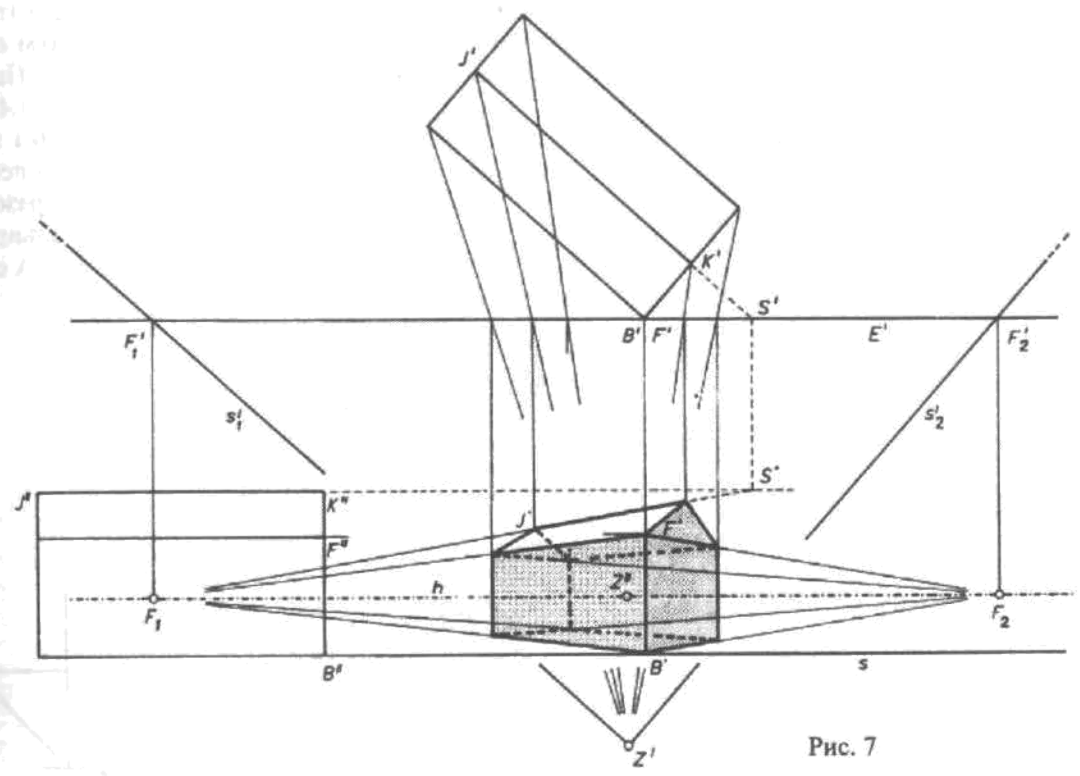


Рис. 7

ода
ых,
экт,
же-
да
ла-
ек-
ке-
3F.

12. Сгорающая свеча — центрально-линейная (перспективная) коллинеация⁶

Еще раз рассмотрим рис. 2 главы 3 «Центральное проектирование». Треугольник ABC , расположенный в вертикальной плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость из центра Z . Если это необходимо, вы можете повторно изучить сам рисунок и сопроводительный текст к нему и затем решить похожую задачу из Задания № 1 к настоящей главе, начав с центра Z_1 .

Теперь представим себе, что «свеча сгорает»: центр Z опускается вертикально вниз по направлению к Z' . При этом световое пятно от треугольника движется в горизонтальной плоскости вперед и к тому же растет — и в ширину, и в длину! Попробуем точнее проследить за изменениями. Для этой цели дадим опуститься центру до положения Z_2 и нарисуем соответствующую проекцию. Затем опустим центр еще ниже — до положения Z_3 . Что произошло с треугольным изображением (рис. 1)? Направим все свое внимание на точку A . Когда Z опускается вниз, проекционный луч, проходящий через A , пробегает множество положений, лежащих в пределах некоего пучка прямых; центр этого пучка лежит в точке A . Рассмотрим горизонтальную проекцию вращающегося проекционного луча; она все время одна и та же, а именно s'_A , поскольку пучок прямых лежит в вертикальной плоскости, образованной свечой и прямой s'_A . Что является сечением вращающегося проекционного луча и горизонтальной плоскости? Ряд точек $s'_A \cdot A'$ пробегает ряд точек s'_A ! То же самое происходит с вершинами B и C . А стороны треугольника? Они вращаются вокруг неподвижных точек F_a, F_b и F_c .

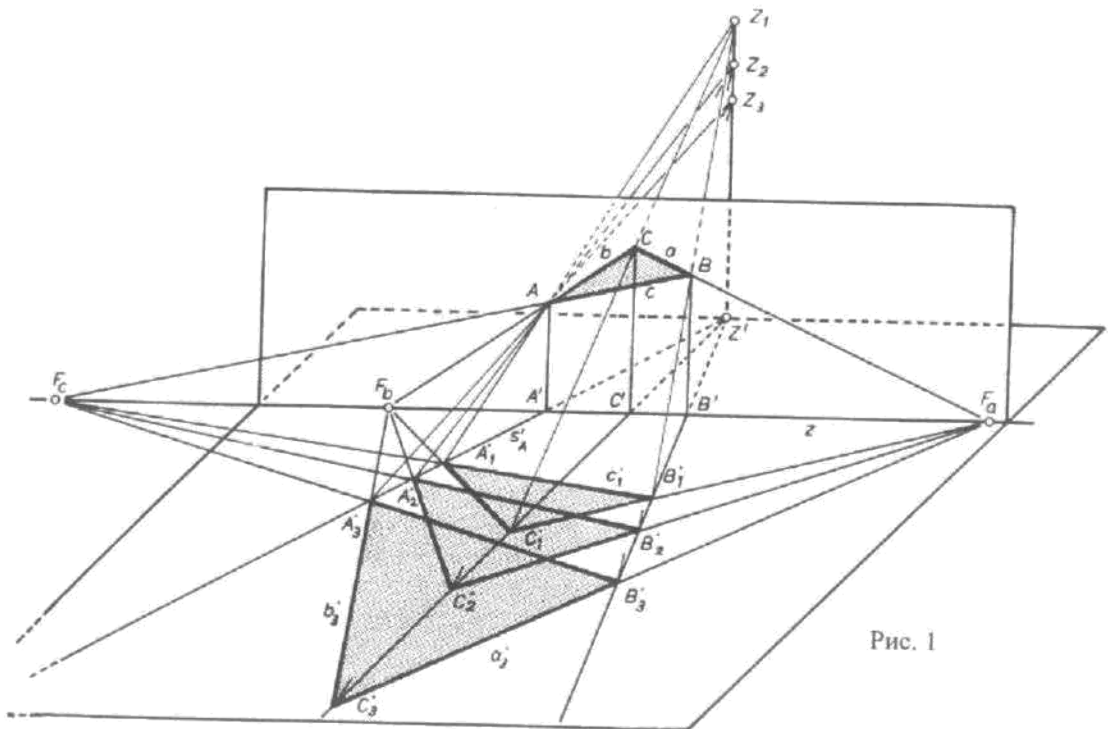


Рис. 1

Наблюдатель, который не видит вертикальную, а только горизонтальную плоскость, отслеживает только движущееся треугольное пятно света, величина и очертания которого постоянно меняются. Но меняются они не произвольно, а следуя двум определенным законам:

1. Вершины треугольника движутся по прямым (неподвижным прямым), которые проходят через центр Z' .
 2. Стороны треугольника вращаются вокруг неподвижных точек, которые лежат на прямой (оси) z .
- Такого рода движение мы будем называть *центрально-линейной (перспективной) коллинеацией*. (Чаще всего ее называют просто центральной коллинеацией; однако такое обозначение

⁶ В русскоязычной математической литературе принят термин «перспективная коллинеация». Часто употребляется также термин «гомология». — Прим. пер.

указывает лишь на наличие центра, но при этом не отмечается, что линия (ось) по сути этому центру равнозначна.)

Второй пример перспективной коллинеации: Спроецируем квадрат $ABCD$ из центра Z_1 на горизонтальную плоскость и затем начнем опускать центр до положений Z_2 и Z_3 (последнее положение — особенное). Готовое решение показано на рис. 2. Снова можно проследить превращение образов. Теряется форма квадрата, образы даже не являются параллелограммами. Это так называемые «драконовы хвосты», которые, впрочем, также постоянно меняют свои размеры и форму.

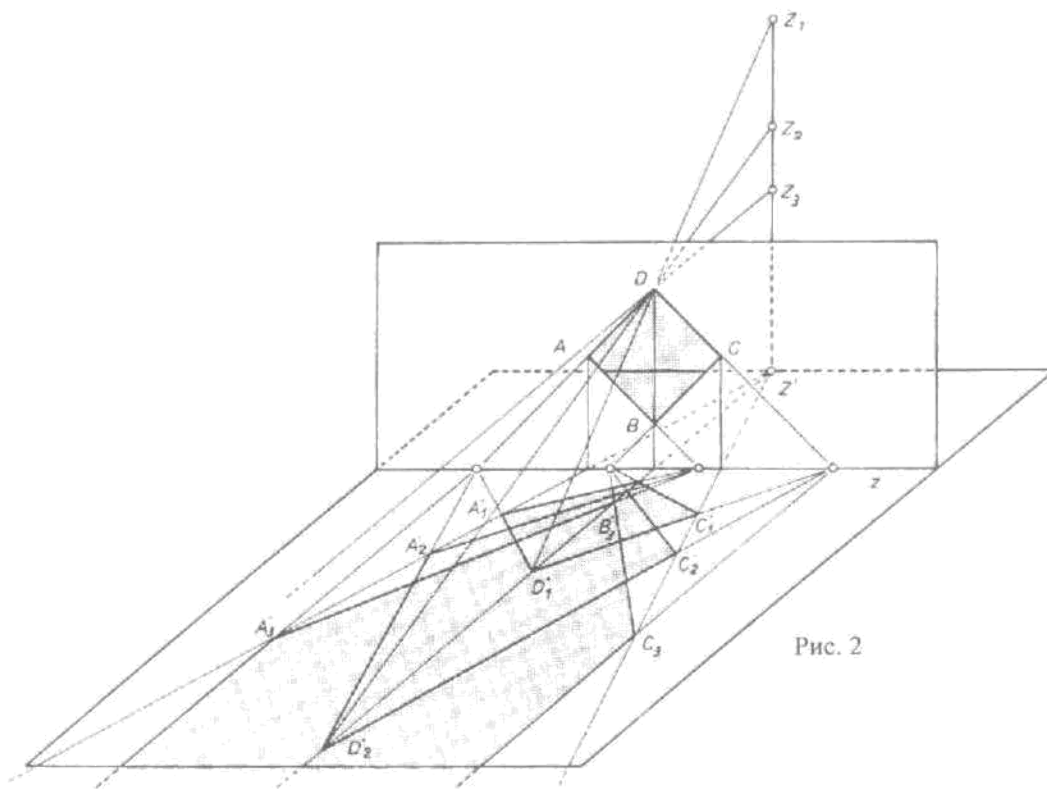


Рис. 2

Задание 3 составлено таким образом, чтобы читатель построил изображение треугольника на горизонтальной плоскости даже после того, как центр опустился ниже вершины C . Попробуйте шаг за шагом выполнить ряд проекций из $Z_1, Z_2, Z_3 \dots$ вплоть до Z_6 (Z_6 лежит ниже горизонтальной плоскости! Z_3 находится на уровне вершины C , Z_4 — на уровне основания AB). После серии собственных попыток сравните результат с рис. 3. Третье изображение представляет собой полосу с вершиной C_∞ . Основание четвертого изображения оказывается на бесконечно удаленной прямой; шестое изображение лежит между осью и центром.

Задание 4: Рассмотрим теперь только процесс, происходящий в горизонтальной плоскости. Первое изображение треугольника-образа дано. На предыдущем чертеже изображение двигалось за счет того, что сгорала свеча, т.е. центр проектирования двигался вниз. Теперь мы заставим двигаться треугольник силой своего собственного воображения, однако будем придерживаться двух основных законов перспективной коллинеации. Вершина C должна двигаться вдоль своей неподвижной прямой (C_1Z') вниз вплоть до положения C_2 . Стороны a и b вращаются вокруг неподвижных точек F_a и F_b . Вершины A и B движутся соответственно по своим неподвижным прямым. Сторона c «вращается» вокруг своей неподвижной бесконечно удаленной точки $F_{c\infty}$. Такое вращение видится нам как параллельное перемещение. Теперь сами попробуйте найти решения к шести предложенным условиям.

Готовый чертеж (рис. 4): третий треугольник вырождается в полосу. C_4 можно построить, проведя через F_a и F_b прямые, параллельные неподвижным прямым f_b и f_a . В этом положении A и B бесконечно удалены. Кроме этих шести положений можно нарисовать еще множество промежуточных, пока не возникнет ощущение непрерывного превращения. Каждая вершина пробегает весь ряд точек своей неподвижной прямой. Дважды треугольник вырождается: один раз он оказывается отрезком оси, а один раз все три его вершины сливаются в центре, т.е. треугольник превращается в точку. (На рис. 3 центр пробегает по всей вертикальной прямой; найдите положения центра, приводящие к вырожденным случаям!)

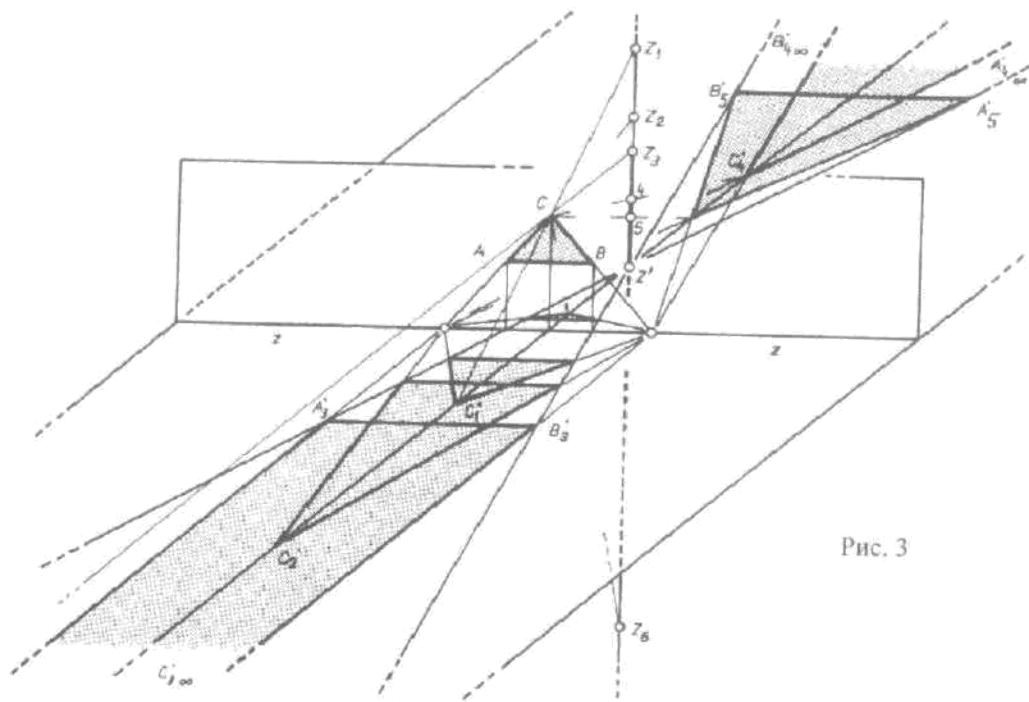


Рис. 3

Итак, мы можем рассматривать перспективную коллинеацию на плоскости, не вспоминая при этом о центральном проектировании со сгорающей свечой. Необходимы просто наличие центра коллинеации (мы будем называть его далее Z , а не Z') и ось коллинеации z . Если они даны, тогда точки движутся по точечным рядам, центрированным в Z , а прямые вращаются в пучках, центры которых линированы, т.е. собраны на прямой z .

Пусть точка A перемещается из положения A_1 в положение A_2 по своей неподвижной прямой (рис. 5), тогда все остальные прямые a, b, c, \dots , проходящие через A , вращаются вокруг своих неподвижных точек из положений a_1, b_1, c_1, \dots в положения a_2, b_2, c_2, \dots . Чтобы найти новое положение произвольной точки B_1 (рис. 6), нужно просто провести прямую, соединяющую ее с A_1 , и затем повернуть эту прямую вокруг ее неподвижной точки вплоть до положения A_2 . Новое положение произвольной прямой g находится выбором на ней произвольной точки C_1 и затем выполнением тех же процедур, что и в случае B_1 (рис. 7).

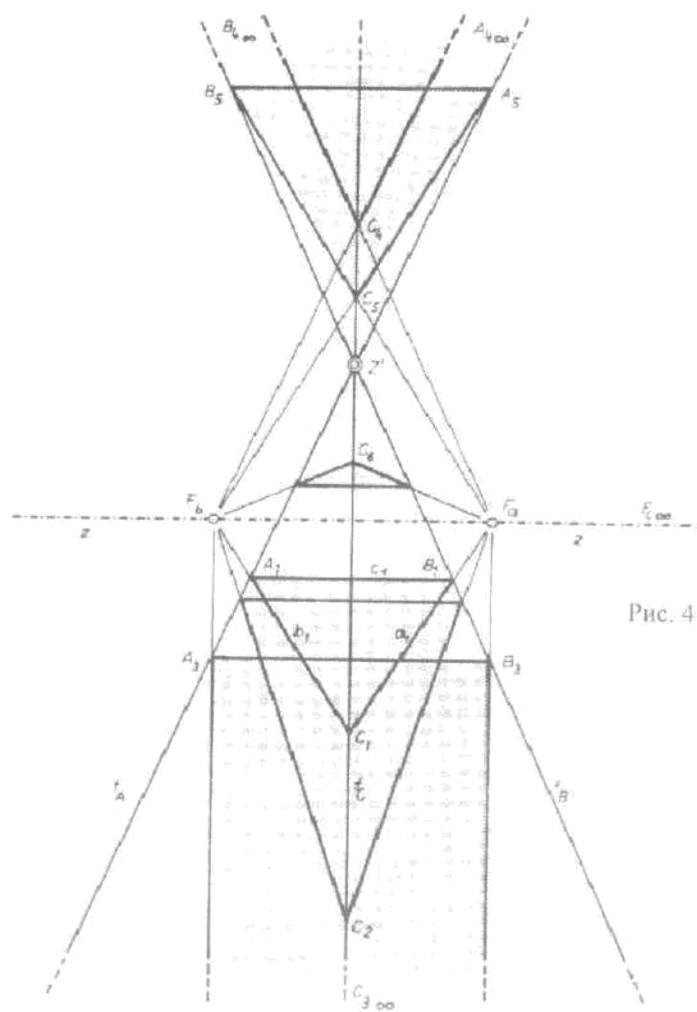
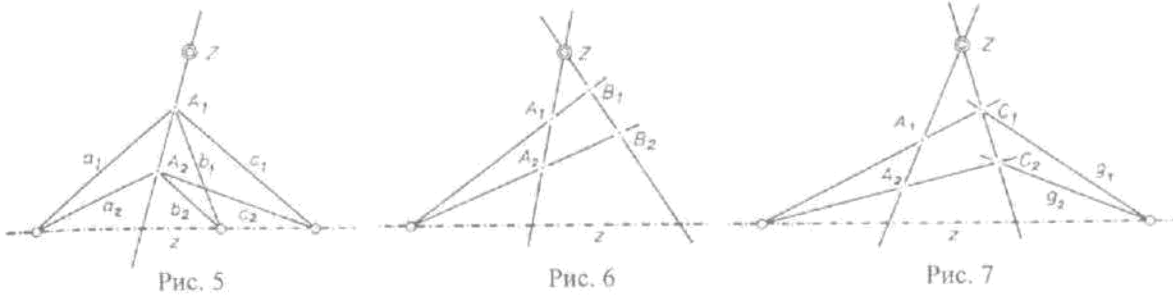


Рис. 4



Мы можем назвать точку A *инициатором* перспективной коллинеации. Все остальные точки и прямые (кроме неподвижных элементов) определены рамками описанных в предыдущих абзацах конструкций.

В этой главе внимательный читатель снова мог заметить элементы двойственности. Если мы остаемся в пределах плоскости, то возникает зеркальное соответствие между точками и прямыми, центром и осью, пучками прямых и рядами точек. Вместо точки A можно было бы, с тем же успехом, выбрать в качестве инициатора какую-нибудь прямую a . Такое соответствие называют *двойственностью на плоскости*. Таблица основных двойственных соответствий на одну ступень отличается от двойственности в пространстве.

Итак, двойственность на плоскости:

Точка	двойственна	прямой
«лежать в (на)»	двойственно	«проходить через»
соединять (образующая)	двойственно	пересекать (сечение)

В плоскости есть только два основных объекта: ряд точек и пучок прямых; они двойственны друг другу (еще раз подчеркнем: на плоскости!).

Центр перспективной коллинеации может находиться и внутри фигуры, например внутри четырехугольника (Задание № 5 к настоящей главе). Можно выбрать в качестве инициатора преобразования одну из вершин, скажем вершину A , и построить несколько возможных положений (рис. 8; значение выделенной точки S прояснится только в главе 14).

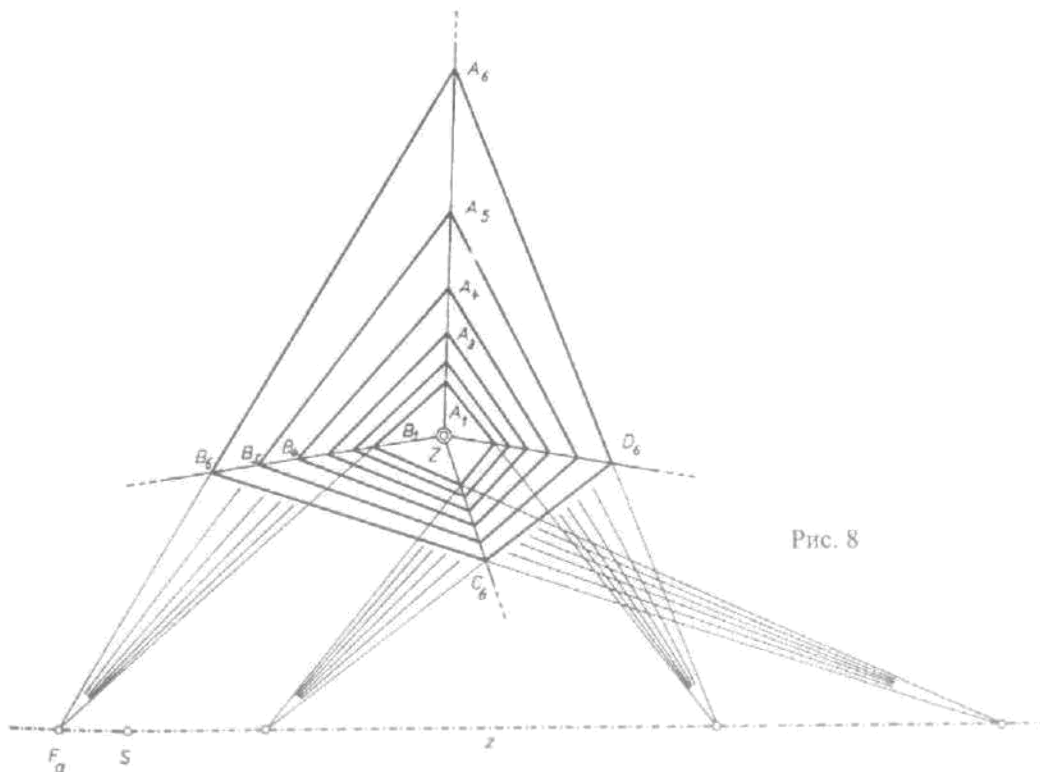


Рис. 8

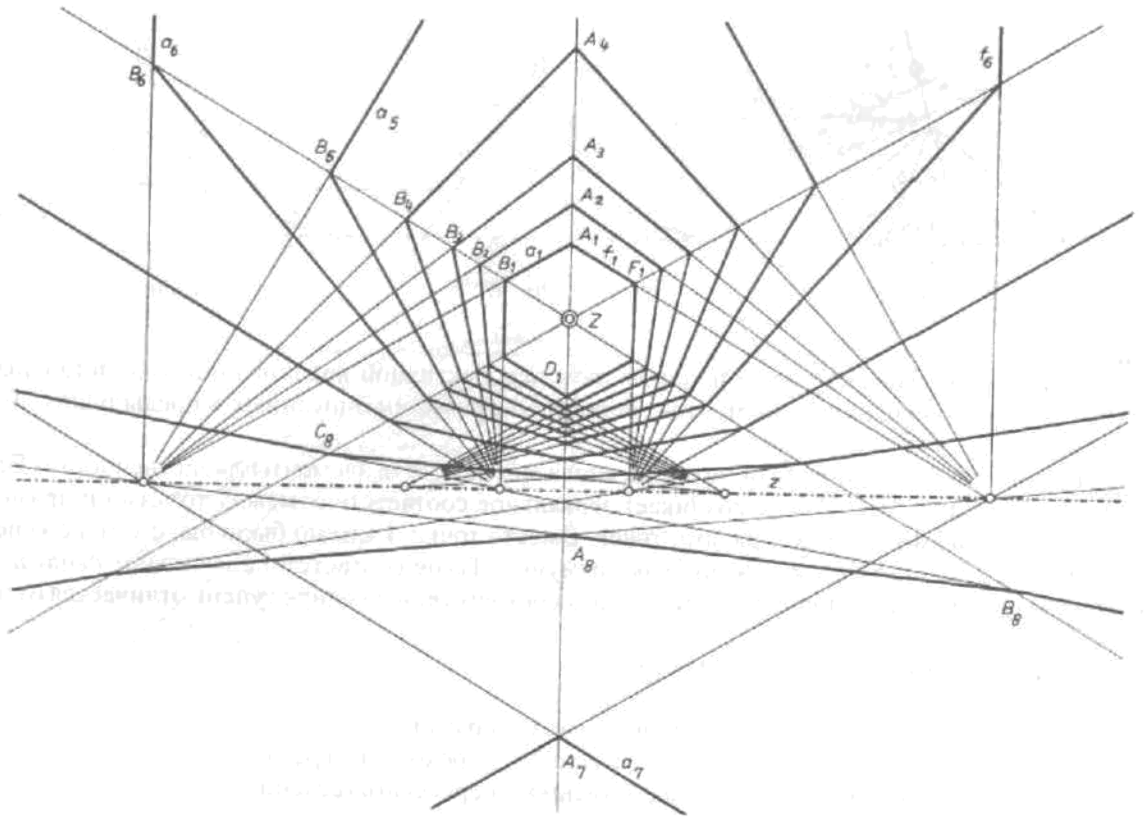


Рис. 9

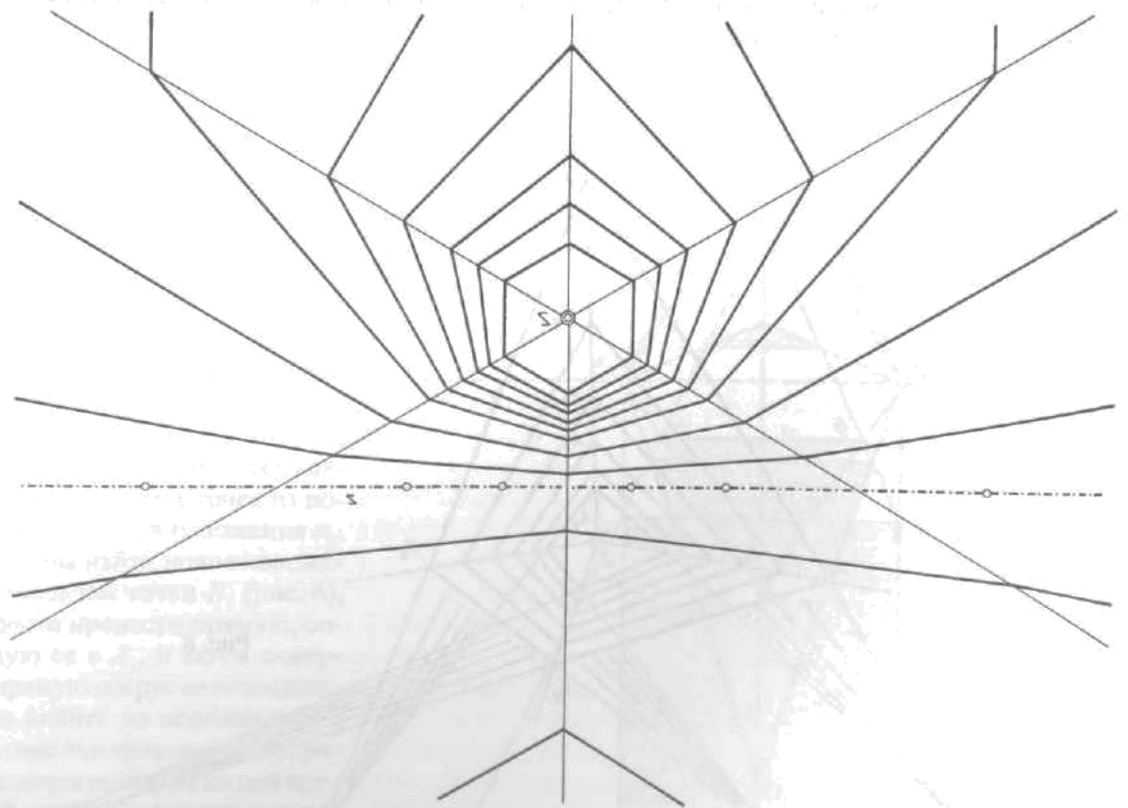


Рис. 10

На рис. 9 (Задание № 6) в качестве исходной фигуры выбран правильный шестиугольник, центр которого является одновременно центром коллинеации. Пусть вершина A будет играть роль инициатора преобразования, и пусть она пройдет по всей неподвижной прямой. Как только A начинает движение вверх, шестиугольник растет во всех направлениях (но не во всех равномерно). Вершина D , например, проходит очень небольшой отрезок. Когда A доходит до бесконечно удаленной точки своей неподвижной прямой (A_{∞}), стороны a_6 и f_6 становятся параллельными друг другу и при этом перпендикулярными оси. Можно построить и промежуточные положения, когда A еще не дошла до бесконечности, но при этом уже вышла за пределы листа. Тогда в качестве «отправной точки» следует брать, например, сторону a_5 . Прохождение A через бесконечно удаленную точку означает, что прямая a провернулась через вертикальное положение. Когда она станет параллельной неподвижной прямой точки B (a_1), тогда в бесконечности окажется сама точка B . Если a проходит и это положение, то B появляется на своей неподвижной прямой снизу справа, где-то в положении B_8 . Можно проследить, как отрезок AB движется между неподвижными прямыми своих концов. Чтобы отыскать точку C_8 , нужно повернуть сторону b вокруг своей неподвижной точки вплоть до положения B_8 ; отрезок B_8C_8 проходит при этом через бесконечность. Перемещение CD вплоть до положения C_8D_8 происходит полностью в конечной области. На рис. 10 шестиугольники изображены без всяких дополнительных построений.

При рассмотрении этой последовательности изображений возникает отчетливое ощущение: фигуры взаимосвязаны. Каждая фигура закономерно возникает из предыдущей, вырастает из нее и затем так же закономерно перерастает в последующую. По сути есть только одна фигура; но она претерпевает процесс превращения, в результате которого последовательно рождаются различные образы. Можно было бы начать с любого, все равно последовательность осталась бы прежней. В идеальном смысле все образы друг с другом связаны. Такое – происходящее согласно внутреннему закону – превращение мы назовем *метаморфозой*.

Гёте рассматривал органы живого растения, появляющиеся на нем в процессе роста, также в некоей идеальной связи. Как бы различно они ни выглядели, но все они – лист. Растение как живое существо постоянно преобразует (*метаморфозует*) свой основной орган. Уже у листовых растений оказывается, что лист на середине ветви может выглядеть совсем иначе, чем у основания или на конце. Совершенно особенным мастером превращения является лютик: через какие только метаморфозы не проходят в ходе развития его листья. Еще радикальнее выглядит метаморфоза от листа к лепестку чашечки, настоящему лепестку, тычинке и пестику. Внешне в растении мы можем видеть только отдельные внешние облики, совершенно в том же смысле, как и в нашем геометрическом превращении, мы строили только отдельные положения. Само преобразование, *метаморфоза*, совершается не во внешнем видимом; мы должны переводить одну ступень в другую во внутреннем созерцании. Если наше внутреннее созерцание натренировано геометрическими метаморфозами, то мы можем надеяться, что «увидим» и реальную метаморфозу, которая приводит растение от одного органа к другому. Ключом к пониманию органического является способность внутренне преобразовывать идеальный тип. Внешние органы и организмы могут рассматриваться как манифестации различных внутренних возможностей данного типа. Гёте подходил таким образом к миру органического, и Штейнер с теоретико-познавательной точки зрения обосновал этот подход в своей работе «Основные черты теории познания гётевского мировоззрения».

Еще раз: ценность производимых нами геометрических метаморфоз лежит главным образом в том, что мы на их материале тренируем нашу внутреннюю способность созерцания. Дело совсем не в том, чтобы прилагать полученные фигуры как своего рода шаблоны к живому растению. Можно даже сказать, что существует определенная опасность слишком внешнего применения геометрии к природе. В последующих главах мы увидим, как благодаря геометрическим рассмотрением можно подойти к различным качествам, например различным силам. Такие геометрические рассмотрения могут действительно помочь приобретению более глубоких прозрений в природные силы и процессы.

13. Множества точек и области прямых – ядра и оболочки

Прежде чем мы продолжим наше рассмотрение перспективной коллинеации, взглянем на множества точек и области прямых, лежащих в одной плоскости. Принцип двойственности особенно ярко проявляется именно на их примере.

Если мы нарисуем на плоскости три произвольные прямые a , b и c общего положения (т.е. не проходящие через одну точку), они разделят ее на несколько точечных множеств (рис. 1). В первую очередь мы обращаем внимание на то множество, которое мы обычно называем треугольником ABC . Мы привыкли вычислять его параметры и производить в нем всевозможные построения. Все, что лежит вовне, мы, как правило, не рассматриваем. Однако если продолжить прямые a , b и c за вершины и помыслить их на всем протяжении, то можно увидеть, что множества точек возникают и вне треугольника ABC . Вначале мы склонны считать, что таких множеств шесть. Но, если действительно до конца продумать понятие плоскости, окажется, что их несколько меньше.

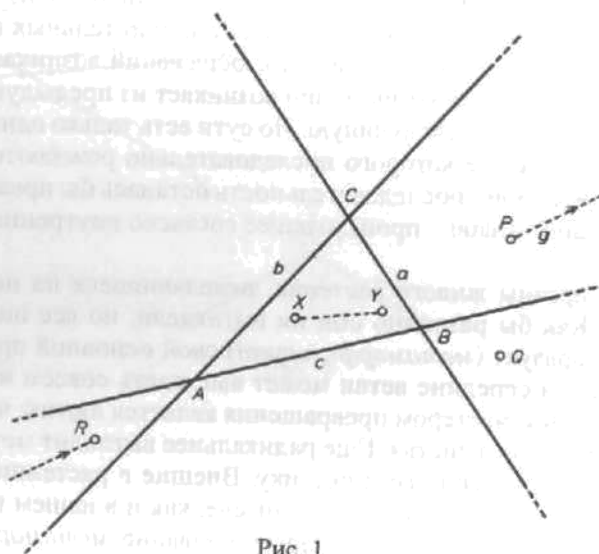


Рис. 1

Почему мы относим лежащие внутри треугольника ABC точки к *одному множеству*? Потому что от любой точки этого множества до любой другой можно пройти, оставаясь целиком в пределах самого множества. Рассмотрим, например, две точки X и Y ; прямолинейный отрезок ведет от одной точки к другой и при этом не пересекает ни одну из сторон. Естественно, существуют и криволинейные пути такого же вида. Прямые a , b и c являются *границами* множества. А почему P и Q лежат в разных множествах? Потому что не существует ни одного пути из P в Q (ни прямого, ни кривого), идя вдоль которого не пришлось бы раз пересечь границу.

Теперь посмотрим, как обстоит дело с точками P и R ? Представим себе прямую, соединяющую эти две точки. P и R делят ее на две части, два сегмента, один конечный, а другой – бесконечный. Вдоль конечного сегмента, конечно, нельзя прийти из P в R , не пересекая границ; однако если двигаться из P в R по бесконечному сегменту, то мы нигде не встретимся ни с одной из граничных прямых a , b или c . Правда, мы пересечем бесконечно удаленную прямую, но ведь она не является граничной! Значит, P и R принадлежат одному точечному множеству! Мы встречаемся здесь с тем же явлением, с которым мы уже познакомились в главе 4 (рис. 1, пятый треугольник), – треугольник переходит через бесконечность. Аналогичная ситуация с множеством ниже стороны c (заканчивается это множество сверху, у вершины C) и с множеством, располагающимся вверх налево от стороны b (и заканчивающимся справа внизу у B). Значит, всего множеств *четыре*: одно из них лежит всецело в конечном, а три других проходят через бесконечность. Каждое из четырех множеств, не только конечное, ограничено с трех сторон. Мы можем пройти по границе любого из них, например того, которому принадлежат наши точки P и R : из вершины A мы идем по стороне c через бесконечность к вершине B , затем по стороне a в рамках конечной области к вершине C и наконец по стороне b , снова через бесконечность, возвращаемся в вершину A . При этом мы лишь один раз проходим вдоль всей границы нашего точечного множества. Можно мысленно пробежаться вдоль границ всех остальных! В результате мы видим: *Три прямые общего положения делят плоскость (плоское поле точек) на четыре трехсторонних множества.*

А четыре прямые? Попробуем разобраться! Как бы мы ни располагали прямые (предполагается общее положение), всегда возникают три четырехугольных и четыре треугольных множества (рис. 2). Каждое четырехугольное множество граничит только с треугольными, и наоборот! Друг с другом четырехугольные множества соприкасаются только вершинами; впрочем, как и треугольные. На рис. 2 две четырехугольные и две треугольные области проходят через бесконечность. В главе 18 мы рассмотрим рис. 2 еще в одной связи. А деление точечного поля пятью прямыми станет основой главы 24.

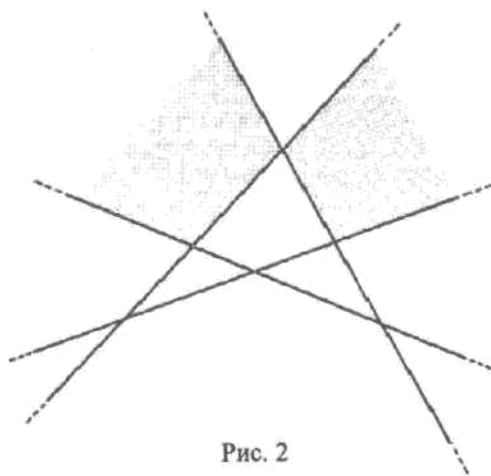


Рис. 2

Прежде чем мы обратимся к сегментации поля прямых, сформулируем несколько задач, касающихся множеств точек.

На какие области делится точечное поле с помощью:

1. Двух прямых?
2. Двух параллельных прямых?
3. Прямой g_∞ и еще одной прямой?
4. Трех прямых, две из которых параллельны?
5. Прямой g_∞ и еще двух прямых?
6. Четырех прямых, образующих параллелограмм?
7. Четырех прямых, образующих трапецию?
8. Прямой g_∞ и еще трех прямых?

Кроме того, следует уяснить, что одна прямая не порождает *никакого* разделения на различные множества. От одной точки к другой в этом случае всегда ведет прямолинейный, не пересекающий границ (хотя, возможно, и проходящий через бесконечность) отрезок.

Процесс деления на точечные множества подкрепляется нашим «практическим опытом». Другое дело — деление поля прямых. Здесь нам остается только уцепиться за понятие двойственности.

Вместо трех граничных прямых рассмотрим три граничные точки A , B и C (рис. 3). Конечно, они не дадут никакого разделения на множества точек, но посмотрим, что произойдет с прямыми. Возьмем на

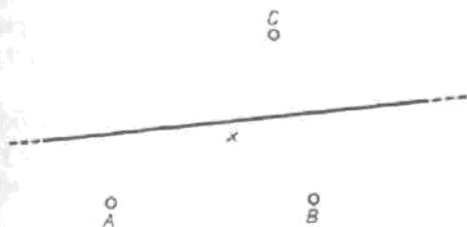


Рис. 3

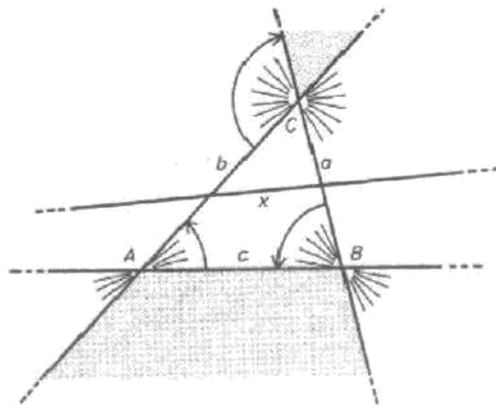


Рис. 4

плоскости произвольную прямую x , не проходящую через граничные точки, и начнем перемещать ее в пределах плоскости, как нам заблагорассудится, с единственным условием – не задевать при этом граничных точек. Представим себе совершенно конкретно: на чертежной доске в точках A , B и C вбиты гвозди. Между ними, вдоль прямой x , лежит «линейка» бесконечной длины. Из-за гвоздей ее подвижность на плоскости ограничена. Как только мы неосторожно попытаемся переместить нашу линейку, так сразу же наткнемся на гвоздь. Существуют три крайних положения, переступить которые мы не в состоянии: это положения, когда линейка одновременно касается двух гвоздей. Из таких положений выбраться можно, только возвращаясь назад. Чуть менее скованны мы в тот момент, когда линейка касается только одного гвоздя: тут можно хотя бы повернуть линейку вокруг точки соприкосновения – впрочем, снова не на полный оборот, но лишь до того момента, пока мы не наткнемся на один из двух оставшихся гвоздей – тут уж снова прочно засели. На рис. 4 вы видите изображенными эти граничные положения.

Крайние граничные положения a , b и c обозначают некое множество точек, которое ни в коем случае не может быть затронуто нашей подвижной прямой (это множество закрыто на рисунке точечным растром). Перед нами одно из тех трехсторонних точечных множеств, с которыми мы только что познакомились. В оставшейся части плоскости прямая может двигаться. На рис. 5 изображено несколько положений, которые могут быть заняты прямой x . Совокупность всех таких возможных положений мы назовем *областью прямых*. Если мы выберем в этой области какую-либо прямую y , то мы всегда можем повернуть нашу линейку из исходного положения x в положение y и при этом не коснуться гвоздей (рис. 6). Именно это означает, что y и x лежат в одной и той же области прямых. Эта область ограничена тремя вершинами A , B и C . Выделенные на рис. 4 прямые являются *граничными прямыми* данной области. В предыдущих рассуждениях мы обходили точкой точечную границу точечного множества. Совершенно так же можно обойти прямой границу области прямых. Мы начинаем вращение от положения c (рис. 4), проходим по пучку прямых с центром A , пока не достигнем прямой b ; затем мы вращаемся вокруг точки C вплоть до положения a ; а затем – вокруг B обратно к положению c . Три выделенных фрагмента из пучков прямых с центрами A , B и C мы назовем *растрами* (двойственные сегментам точечного ряда); они являются граничными, или крайними, растрами данной области прямых. Множество точек и область прямых взаимно дополняют друг друга; они относятся друг к другу как *ядро и оболочка*.

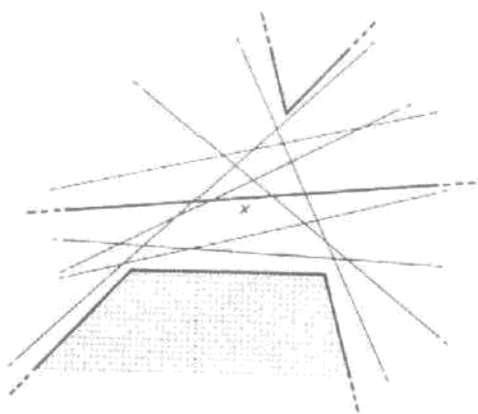


Рис. 5

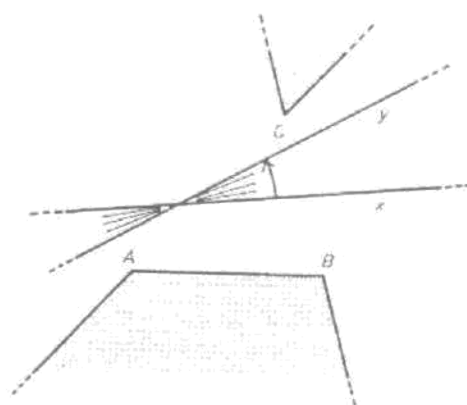


Рис. 6

На рис. 7 закрашено внутреннее ядро; оболочка представлена только несколькими прямыми и граничными растрами. Оболочка простирается вплоть до бесконечно удаленной прямой, принадлежащей этой оболочке. Нарисуйте ядро и оболочку для тех случаев, которые заданы на рис. 8 и 9 исходной прямой x .

Итак, каждый трехсторонник abc одновременно является треугольником ABC , и наоборот. Этот трехсторонник делит все точечное поле на четыре трехсторонних множества. Двойственное утверждение: *Треугольник делит поле прямых на четыре треугольные области прямых*. Каждому множеству точек соответствует область прямых, и они связаны друг с другом как ядро и оболочка.

Вам предстоит самостоятельно отыскать области, на которые поле прямых разделяется четырьмя точками. Для этого возьмите четыре произвольные точки общего положения A , B , C и D (никакие три из них, и уж тем более никакие четыре, не лежат на одной прямой). Затем нарисуйте произвольную исходную прямую x и ищите все те положения, в которые можно перевести x , не догравиваясь до «гвоздей». Нарисуйте также растры! На рис. 10 и 11 изображены четырех- и трехсторонняя области прямых с точечными ядрами. Не успокаивайтесь, пока во всех случаях не достигнете полной ясности. Четыре

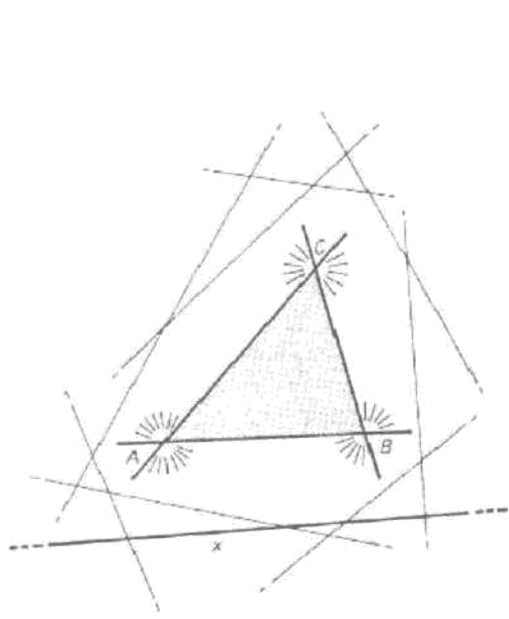


Рис. 7

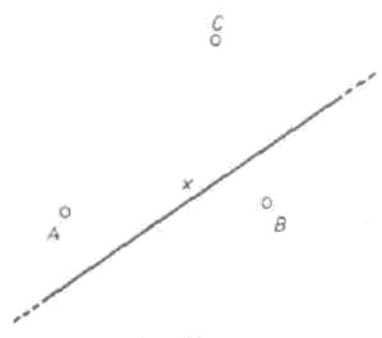


Рис. 8

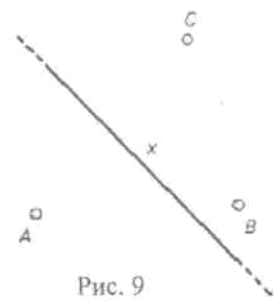


Рис. 9

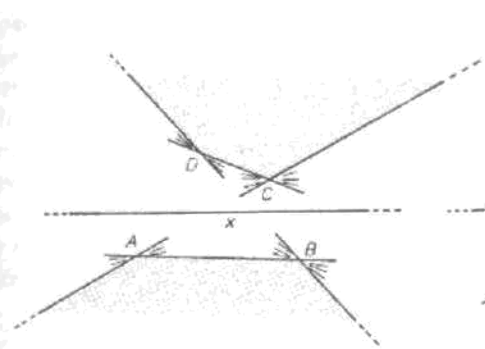


Рис. 10

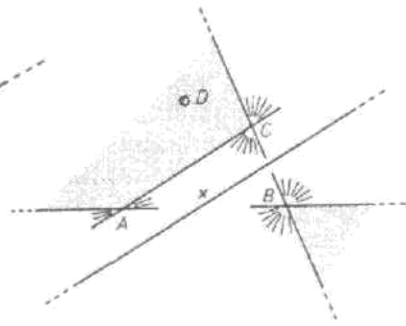


Рис. 11

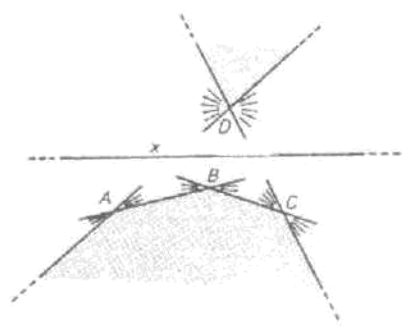


Рис. 12

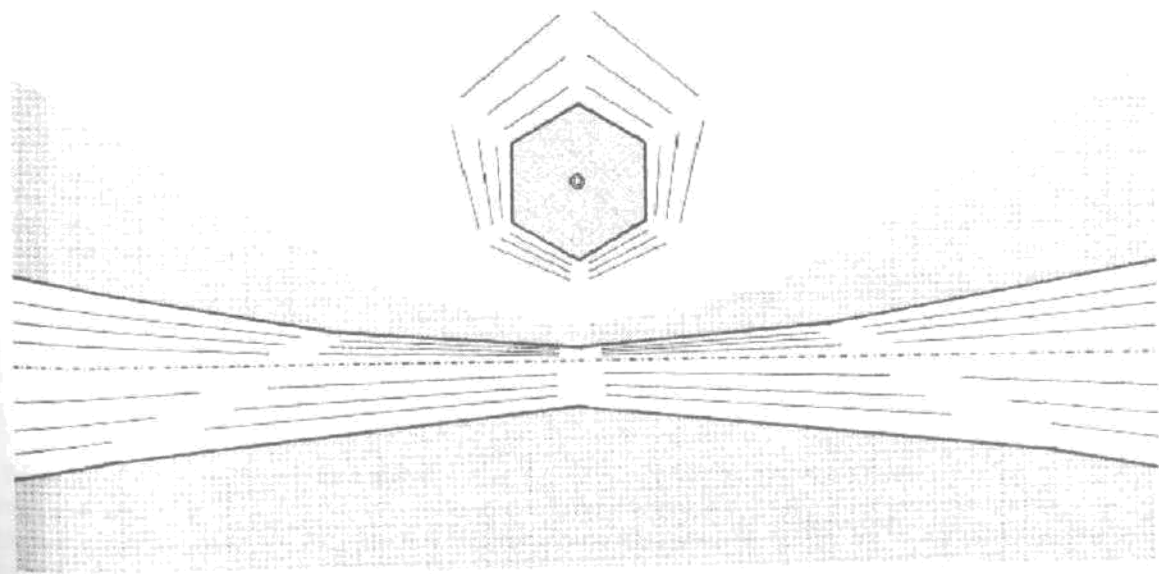


Рис. 13

точки могут располагаться по-разному: или как на рис. 10 и 11 (когда ни одна из них не лежит внутри треугольника, образованного тремя остальными), или как на рис. 12 (одна из точек (B) лежит «внутри» трех других). Найдите все области прямых также и для такой ситуации! Их семь!

В конце данной главы еще раз оглянемся на рис. 9 предыдущей главы. Каждый из шестиугольников обладает ядром и оболочкой. Когда ядро мало, оболочка велика, и наоборот. На рис. 13 намечены оболочки первого и восьмого шестиугольников. Оболочка первого (самого внутреннего) шестиугольника распространяется далеко вовне; к ней относится также и бесконечно удаленная прямая. В каждом из последующих шестиугольников ядро все больше, а оболочка все меньше. В шестом шестиугольнике ядро одной из вершин касается бесконечно удаленной прямой, которая оказывается граничной прямой оболочки. Ядра седьмого и восьмого шестиугольников пересекают бесконечно удаленную прямую. Их оболочки превращаются в «рукава», в которые попадает также и ось z (рис. 13). Ядро восьмого шестиугольника покрывает всю плоскость, кроме «рукава». В крайнем, граничном случае оболочка сжимается вокруг прямой z , а ядро покрывает все точечное поле. И наоборот, ядро может сжаться до центра Z , а оболочка вырастет, заняв все поле прямых. Взаимодействие ядра и оболочки будет подробно обсуждаться в главе 26.

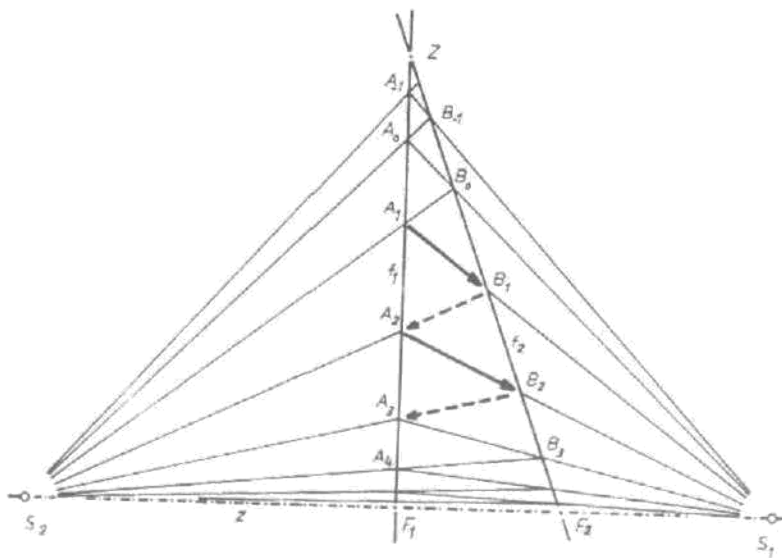
Все рассматриваемые нами множества точек обладали *прямолинейными* границами, а области прямых были *угловатыми*. В последующих главах мы познакомимся с множествами и областями с *криволинейными* границами.

14. Шкалы роста – шкалы с двумя точками концентрации

Предварительное замечание: На рис. 9 главы 12 мы изображили последовательность шестиугольников, появляющихся друг за другом как результат перспективной коллинеации. При этом мы произвольно выбрали в качестве инициатора точку A и шаги от A_1 к A_2 , от A_2 к A_3 , от A_3 к A_4 и так далее. Следует устранить эту произвольность, т.е. сконструировать шаги от A_2 к A_3 , от A_3 к A_4 и далее так, чтобы они были все «одного размера», «равного» первому шагу от A к A_1 . Нам, иными словами, хотелось бы сконструировать шкалу $A_1A_2A_3A_4\dots$ с совершенно *равными* делениями. Мы увидим, что равные шаги – это далеко не то же самое, что равные отрезки. Следующее рассмотрение будет одним из самых трудных во всей книге; оно призвано преодолеть представление о застывшем метровом эталоне. Кто не сможет полностью понять его, пусть спокойно продолжит чтение.

В главе 12 мы видели, как точка A выступает в качестве инициатора перспективной коллинеации и движется от A_1 к A_2 и как все остальные точки и прямые (исключая неподвижные элементы) следуют за ней. Теперь внимание читателя должно обратиться не столько на непрерывное преобразование, сколько на скачок от A_1 к A_2 . Все остальные точки и прямые также перепрыгивают в следующее положение. В том числе и точка A_2 . Чтобы проследить скачок точки A_2 , давайте сконструируем вначале движение любой другой точки B_1 , не лежащей на неподвижной прямой точки A (рис. 1). Построение совершается согласно рис. 6 главы 12 (проекция из точки S_1). Шаг B_1B_2 совершенно равнозначен шагу A_1A_2 , т.е. мы с тем же успехом можем выбрать в качестве инициатора преобразования точку B_1 и рассмотреть теперь уже перемещение A_2 . Соединяем A_2 с B_1 , обозначаем пересечение соединительной прямой с осью как S_2 , проектируем точку B_2 из S_2 назад на f_1 . Так мы получаем точку A_3 . Из построения следует: если A_1 переходит в A_2 , то B_1 переходит в B_2 , а A_2 переходит в A_3 . Из центров S_1 и S_2 на неподвижные прямые проектируется *равный* шаг. Эта процедура может быть естественным образом продолжена: шаг A_2A_3 проектируется из S_1 на B_2B_3 , затем этот последний проектируется из S_2 на $A_3A_4\dots$ и так далее! Как на f_1 , так и на f_2 возникает шкала из совершенно одинаковых шагов; все они равнозначны первому шагу A_1A_2 . Правда, их обычный размер все время уменьшается. Более того, из построения с очевидностью следует, что на обеих неподвижных прямых вслед за каждым шагом можно сделать еще один. Движение не имеет конца! В обычном смысле шаги становятся, правда, все короче и группируются около обеих неподвижных точек F_1 и F_2 . То есть в любом сколь угодно малом отрезке, который мы отложим от точек F_1 и F_2 вверх, на неподвижных прямых оказывается бесконечно много делений нашей шкалы. Поэтому точки F_1 и F_2 называются *точками концентрации* шкал.

Рис. 1



Можно пройти по этим шкалам и в другом направлении. Пусть A_2 сыграет роль инициатора и двинется к A_1 ; тогда B_1 двинется к B_0 . Этот шаг можно спроектировать на $A_1A_0\dots$ и так далее. В этом направлении конца у шкал также не предвидится, зато снова намечается точка концентрации, а именно Z . Еще раз сформулируем условие, когда некоторую точку можно назвать точкой концентрации шкалы: в каждом сколь угодно малом отрезке, отложенном от точки Z вниз на неподвижных прямых f_1 и f_2 , содержится бесконечно много точек шкалы. Это не вопрос построения! Построить можно только конечное

число шагов, но помыслить — сколько угодно. Всю шкалу в целом, совокупность всех точек шкалы можно только представить, хотя невозможно построить последнего шага ни к Z , ни к F_1 и F_2 .

С каждой точкой неподвижной прямой связана некоторая шкала. Действительно, любой точке на прямой f_2 мы можем отвести роль B_1 . И наоборот, мы можем выбрать на прямой f_1 произвольную точку и таким образом спроектировать на f_1 B -шкалу, переведя некоторую точку этой B -шкалы в выбранную нами точку; причем вовсе не обязательно, чтобы ею стала точка B_1 , поскольку мы уже говорили о том, что все шаги равнозначны. Так же обстоит дело со всеми прямыми, проходящими через Z : каждая прямая может выступить в роли f_2 .

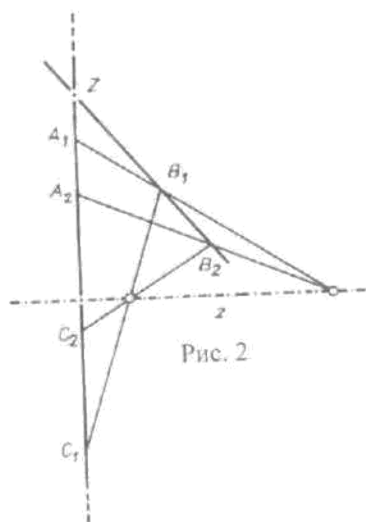


Рис. 2

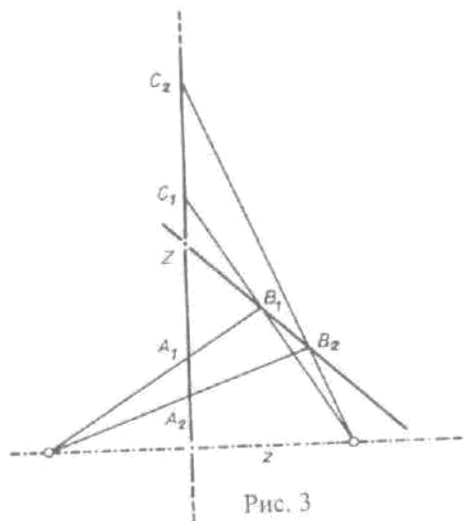


Рис. 3

Каждая неподвижная прямая разделена точкой Z и точкой пересечения F с z на два сегмента (отрезка). Один сегмент конечен, другой бесконечен. (Исключение составляет только прямая \bar{z} , проходящая через Z и параллельная z — оба ее сегмента бесконечны.) Рассмотрим образование шкалы на бесконечном сегменте неподвижной прямой f_1 . Первый шаг A_1A_2 мы перенесем с конечного сегмента с помощью шага B_1B_2 , отталкиваясь от произвольной точки C_1 бесконечного сегмента. Точка C_1 может лежать как ниже (рис. 2), так и выше (рис. 3) точки Z . Если шаг A_1A_2 ведет нас от центра к оси, то и C_1C_2 имеет такое же направление; на рис. 3 это направление ведет нас через бесконечность. Теперь от точки C_1 можно построить нужную нам шкалу, действуя совершенно так же, как и в случае точки A_1 (рис. 4). Из соображений компактности чертежа центр и ось приближены друг к другу несколько больше, чем на рис. 1. C_1C_2 можно считать самым первым, эталонным шагом. Он проектируется из точки S_1 на f_2 и затем из S_2 обратно на f_1 . Мы получаем точно те же самые шкалы, что и в случае конечного сегмента. Шаги концентрируются снизу у точки пересечения неподвижных прямых с осью.

Такую шкалу также можно пройти и продолжить в противоположном направлении. Шкала на рис. 4 устроена таким образом, что обратный шаг C_1C_0 ведет точно в бесконечность, т.е. точка C_0 оказывается бесконечно удаленной точкой прямой f_1 . При этом можно рассматривать C_1C_0 снова как эталонный шаг. Шаг D_0D_1 на прямой f_2 перепрыгивает через бесконечность. Спроектированный из точки S_1 , он порождает на f_1 шаг C_0C_1 , который приводит нас из бесконечности в конечную область (верхняя часть рисунка). Дальнейшее проектирование порождает на f_1 и f_2 шкалы, концентрирующиеся около точки Z . Мы видим, что в данной ситуации бесконечные сегменты ведут себя точно так же, как и конечные: порождаемые на них шкалы имеют ровно две точки концентрации.

Шкалы на \bar{z} (прямой, проходящей через Z и параллельной z) мы рассмотрим отдельно.

Можно представлять себе на всех прямых, проходящих через Z , потоки точек, вырастающих из «окрестности» Z , как из рога изобилия, приближающихся снизу и сверху к оси и затем исчезающих, как в бездонном колоде.

Двойственное рассмотрение. Вместо последовательностей точек рассмотрим пучки прямых с центрами в неподвижных точках и обратное преобразование. Тогда из «окружения» оси z , как из неис-

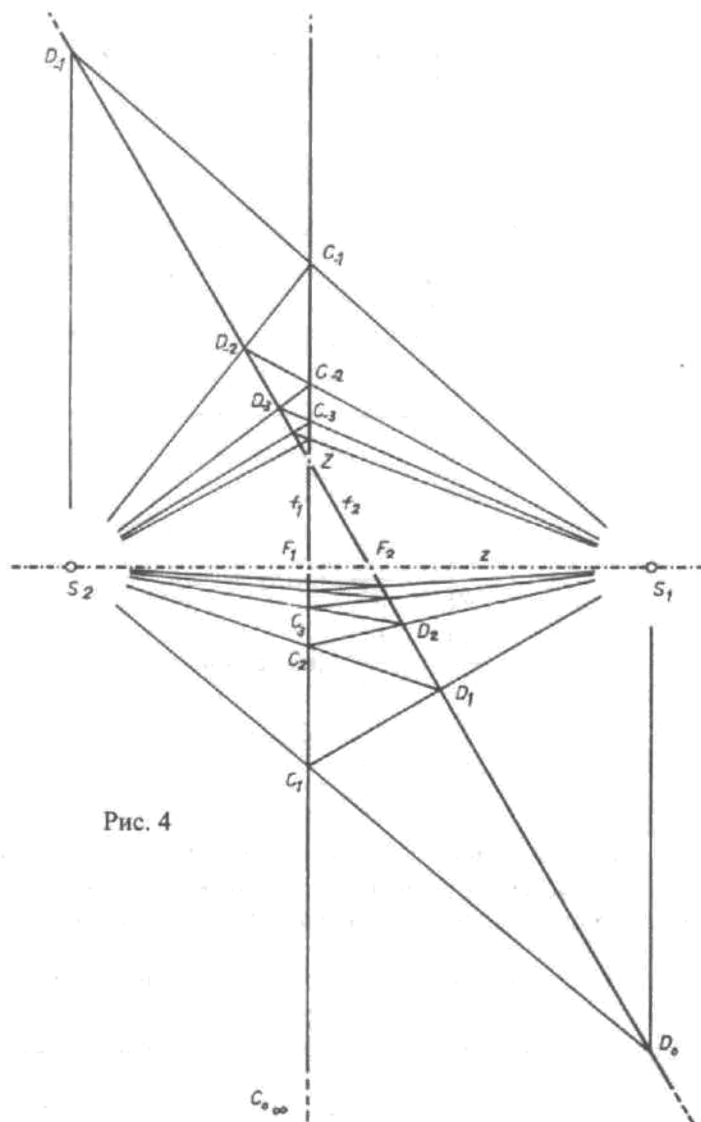


Рис. 4

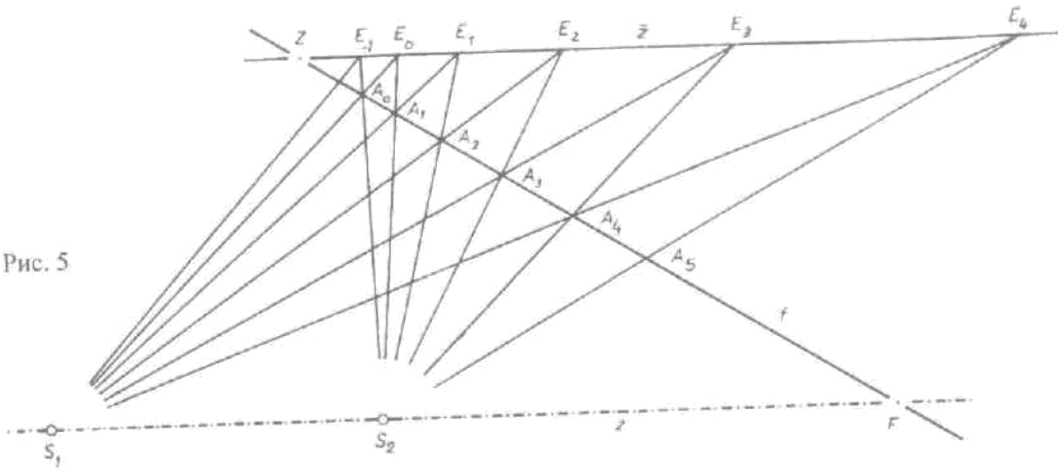
сякаемого источника, рождаются прямые, движущиеся внутри своих пучков к центру Z и затем растворяющиеся в этом центре. Каждая прямая пучка является элементом некоей шкалы, состоящей из прямых. Рассмотрите на рис. 1 и 4 прямые, проходящие через точки S_1 и S_2 . Шаг от предыдущей прямой к последующей совершенно тождествен эталонному шагу от прямой S_1A_1 к S_1A_2 (рис. 1) или от S_1C_1 к S_1C_2 (рис. 4). Каждая шкала прямых имеет две «прямые концентрации»: ось z и прямую, соединяющую центр пучка с центром Z .

Движение точек и прямых по шкалам можно описать и следующим образом: когда какая-то точка или какая-то прямая делает шаг в том или ином направлении по своей шкале к ближайшему элементу, одновременно с ней движутся все точки и все прямые на всех шкалах! Естественно, можно себе представлять дело и так, что единственная точка (единственная прямая) обходит все шкалы.

На рис. 8 главы 12 шкалы образованы вершинами и сторонами четырехугольников (шаги A и B попарно проецируются из точек F_a и S на свои неподвижные прямые). Когда один четырехугольник переходит в следующее положение, то и все остальные также двигаются. Если продолжить последовательность четырехугольников до бесконечности вовне, то вершины и стороны растворятся в окрестности оси (со всей наглядностью этот процесс можно увидеть на рис. 9 главы 12). Если же продолжить последовательность четырехугольников внутрь, то стороны и вершины исчезают в окрестности центра.

Равнозначность всех шагов особенно очевидна, когда шкалы конструируются на произвольной неподвижной прямой f и прямой \bar{z} , параллельной z (рис. 5). Тут нам придется воспользоваться одной из теорем о параллельных, а именно: если три или более прямых одного пучка пересечены двумя параллельными прямыми, то отрезки, высекаемые на одной параллельной прямой, относятся друг к другу, как соответствующие отрезки на другой прямой. Эту теорему легко свести к более простым.

Рис. 5



Из рис. 6 мы видим:

$$\frac{ZE_3}{ZE_2} = \frac{FS_1}{FS_2} \quad (\text{центр пучка } A_3);$$

$$\frac{ZE_2}{ZE_1} = \frac{FS_1}{FS_2} \quad (\text{центр пучка } A_2),$$

значит,

$$\frac{ZE_3}{ZE_2} = \frac{ZE_2}{ZE_1} = \frac{FS_1}{FS_2},$$

то есть отрезки $\dots, ZE_1, ZE_2, ZE_3, \dots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = FS_1 : FS_2$. Именно так называется последовательность величин, отношение соседних членов в которой постоянно. Каждый следующий член в определенное число раз больше предыдущего:

$$ZE_2 = q \cdot ZE_1; \quad ZE_3 = q \cdot ZE_2 = q^2 \cdot ZE_1 \text{ и так далее.}$$

Поскольку многие процессы роста протекают по закону геометрической прогрессии, от роста капитала

$$K_1 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad K_2 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

до увеличения запасов древесины в лесу, Георг Адамс предложил для таких шкал название «шкалы роста».

Можно ли вычислить шаги шкалы A ? Это удастся сделать, когда мы замечаем, каким образом точки $\dots, A_1, A_2, A_3, \dots$ делят отрезок ZF . Отношение $ZA_i : FA_i$ мы назовем простым отношением (или отношением) точки A_i ($i = \dots, 1, 2, 3, \dots$).

Из рис. 6 очевидно, что

$$\frac{ZA_2}{FA_2} = \frac{ZE_2}{FS_1} \quad (\text{подобие } \Delta ZA_2E_2 \text{ и } \Delta S_1A_2F)$$

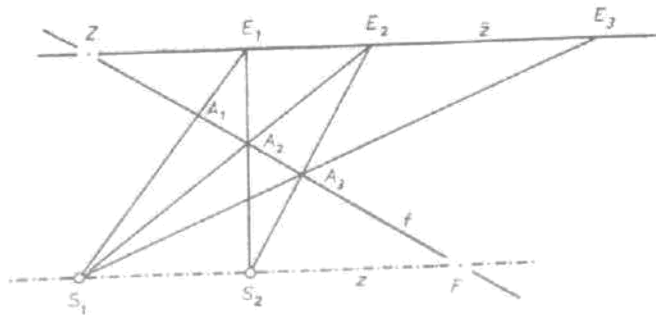


Рис. 6

А также $\frac{ZA_1}{FA_1} = \frac{ZE_1}{FS_1}$ (подобие ΔZA_1E_1 и ΔS_1A_1F)

значит, $\frac{ZA_2}{FA_2} = \frac{FS_1}{FS_2} = \frac{ZE_2}{ZE_1} = \frac{FS_1}{FS_2} = q$.

то есть на отрезке ZF простые отношения $ZA_1 : FA_1$ образуют геометрическую прогрессию с постоянным знаменателем $q = FS_1 : FS_2$; иначе говоря, *отношение последовательных частных отношений постоянно*. Это отношение мы будем называть *двойным отношением* четырех точек. Для краткости введем следующее обозначение:

$$(ZF, A_1A_2) = \frac{\frac{ZA_2}{FA_2}}{\frac{ZA_1}{FA_1}}$$

Символ (ZF, A_1A_2) читается как двойное отношение четырех точек Z, F, A_1, A_2 . Мы можем также сказать, что (ZF, A_1A_2) является двойным отношением эталонного шага A_1A_2 . Оно устанавливает значение q , которое затем особенно отчетливо проявляется в геометрической прогрессии отрезков ... ZE_1, ZE_2, ZE_3, \dots . Двойное отношение шагов – вот что остается постоянным при движении вдоль шкалы:

$$\dots = (ZF, A_1A_2) = (ZF, A_2A_3) = (ZF, A_3A_4) = \dots = q.$$

Иначе: каждое простое отношение в q раз больше предыдущего:

$$\frac{ZA_2}{FA_2} = q \cdot \frac{ZA_1}{FA_1} \quad \frac{ZA_3}{FA_3} = q \cdot \frac{ZA_2}{FA_2} = q^2 \cdot \frac{ZA_1}{FA_1}$$

Четыре точки образуют очевидные пары: пара точек концентрации Z и F и пара последовательных точек нашей шкалы.

Двойное отношение четырех точек играет важную роль в структуре геометрии. Для двойного отношения справедлива следующая важная теорема: *двойные отношения инвариантны к центральному проектированию*.

На рис. 7 четыре точки Z, F, A_1, A_2 , лежащие на прямой g , центрально проектируются из точки S на четыре точки Z', F', A_1', A_2' , лежащие на прямой g' . Почему двойное отношение в этом случае сохраняется? Почему $(ZF, A_1A_2) = (Z'F', A_1'A_2')$? Давайте еще раз рассмотрим рис. 6; из него можно вывести:

$$(ZF, A_1A_2) = \frac{\frac{ZA_2}{FA_2}}{\frac{ZA_1}{FA_1}} = \frac{ZE_2}{ZE_1}$$

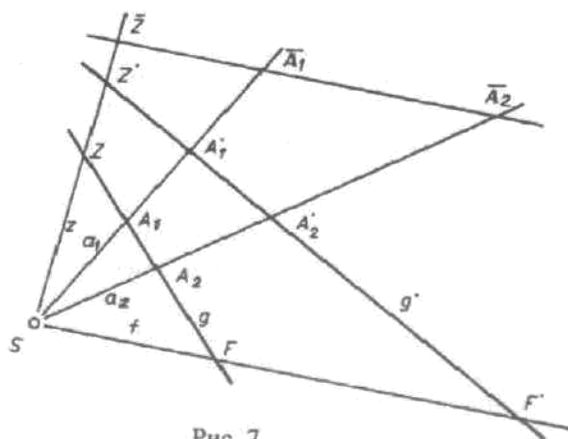


Рис. 7

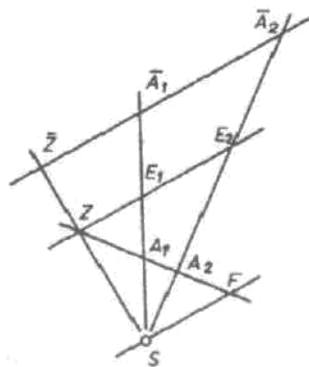


Рис. 8

Это соотношение сохраняется, если четыре точки проектируются так, что одна из них оказывается в бесконечности (рис. 8).

$$(ZF, A_1 A_2) = \frac{ZE_2}{ZE_1} = \frac{\bar{Z}A_2}{\bar{Z}A_1}.$$

Из рис. 7 следует: $(ZF, A_1 A_2) = \frac{\bar{Z}A_2}{\bar{Z}A_1}$ и также $(ZF', A_1' A_2') = \frac{\bar{Z}A_2}{\bar{Z}A_1}$.

Значит, $(ZF, A_1 A_2) = (ZF', A_1' A_2')$.

При построении наших шкал мы проектировали шаги поочередно то на одну, то на другую прямую. При этом двойное отношение шагов никогда не менялось. Именно здесь следует искать объяснение того обстоятельства, что при построении второго шага $A_2 A_3$ (рис. 1) мы имели право произвольным образом выбирать вспомогательную прямую и отправную точку B_1 .

Интересно, что две пары прямых также имеют двойное отношение. Представим себе четыре прямые z, f, a_1, a_2 (рис. 7), пересеченные некоторой прямой g . Тогда, какую бы прямую g мы ни выбрали, двойное отношение четырех точек пересечения будет все время одним и тем же. В этом смысле можно приписать двойное отношение четырем прямым как таковым.

Переход от A_1 к A_2 может вывести нас за пределы конечного сегмента в бесконечный – скачком либо через центр, либо через ось (рис. 9 и 10). Такие шаги мы назовем прыжками. Если прыжком является один шаг, то таковыми оказываются и все остальные. Почему? Все точки A_i на конечном сегменте имеют отрицательное простое отношение $ZA_i : FA_i$, поскольку отрезки ZA_i и FA_i направлены противоположно (будем считать отрезки одного направления положительными, а отрезки другого – отрицательными). Простое отношение точки A_i на бесконечном сегменте, наоборот, положительно, поскольку ZA_i и FA_i направлены одинаково.

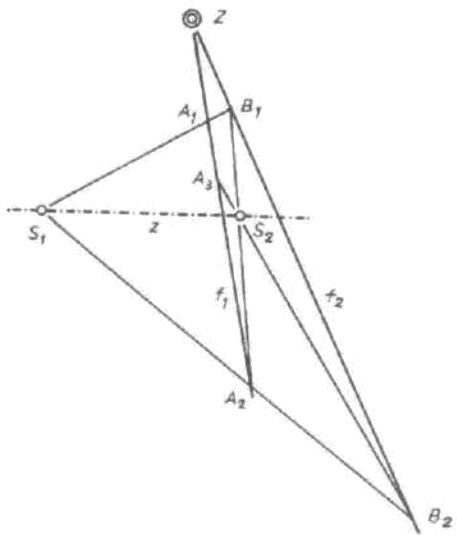


Рис. 9

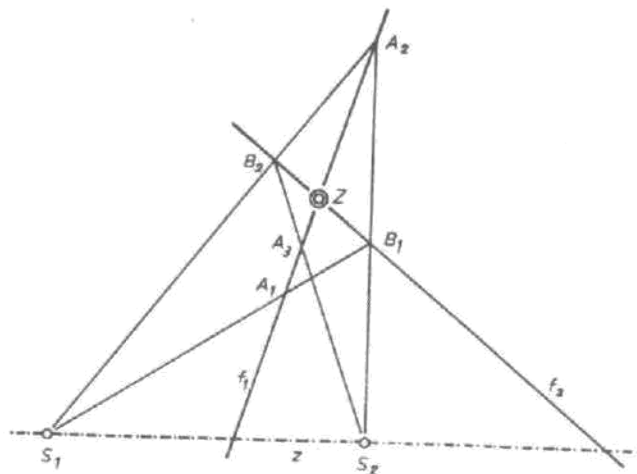


Рис. 10

А как обстоит дело со знаком двойного отношения? Шаги (A_1 и A_2 в одном и том же сегменте, в конечном или бесконечном) имеют положительное двойное отношение, поскольку оба простых отношения имеют одинаковые знаки. Прыжки (A_1 и A_2 в различных сегментах) имеют отрицательное двойное отношение, поскольку простые отношения имеют разные знаки.

Назовем шкалы, состоящие из шагов, скользящими шкалами, а шкалы, состоящие из прыжков, прыгающими шкалами. В главе 16 мы покажем, что среди прыгающих шкал есть одна совершенно особенная.

На рис. 11а на прямой f_1 построена прыгающая шкала. Пусть A_0 является бесконечно удаленной точкой прямой f_1 . Пусть эталонный прыжок перемещает нас из A_0 в A_1 . Можно представить себе, что этот прыжок совершается или через центр, или через ось. Спроектируем его из S_1 (выбор произволен) на \bar{z} . Затем спроектируем прыжок $E_0 E_1$ из S_2 на $A_1 A_2$ и так далее. Как на шкале A , так и на шкале E следующие друг за другом точки прыгают через точку концентрации Z все более мелкими прыжками. Отрезки $\dots, ZE_1, ZE_2, ZE_3, \dots$ образуют знакопеременную геометрическую прогрессию ($q < 0$).

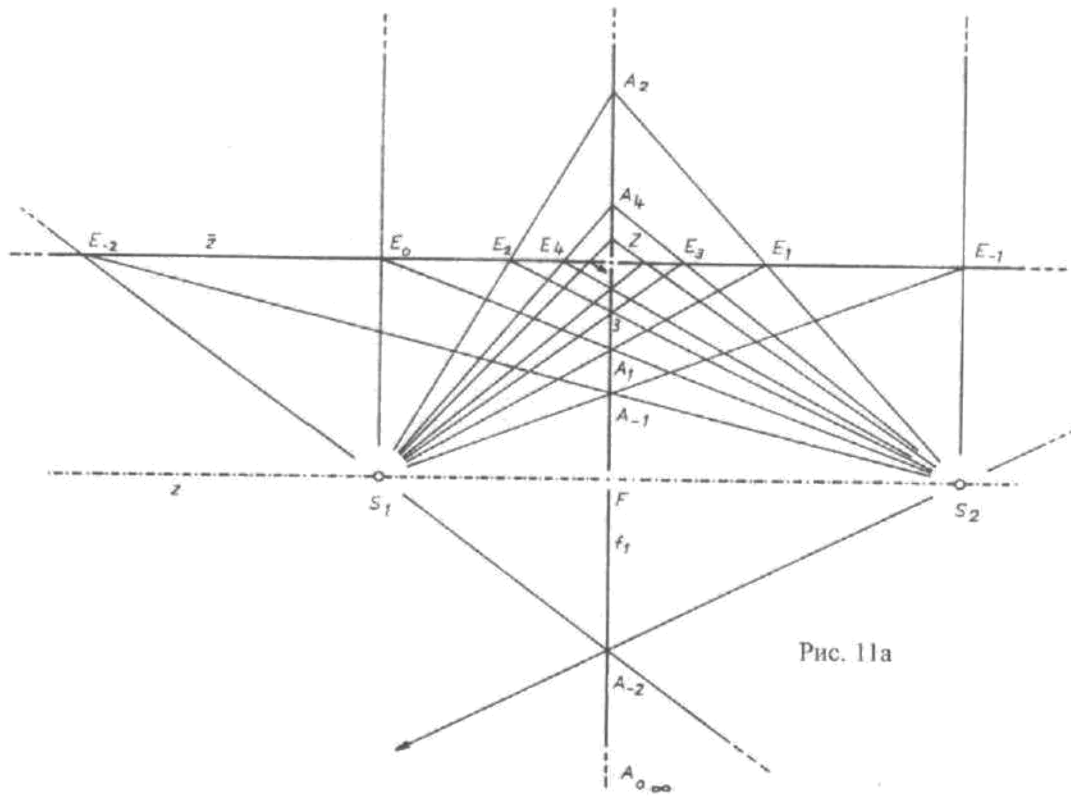


Рис. 11а

Данная конструкция (рис. 11а) побуждает нарисовать спиралевидную последовательность отрезков от A_1 к $E_1, A_2, E_2, A_3, E_3, \dots$ и так далее (рис. 11б). Получившаяся фигура сжимающимися кольцами охватывает точку концентрации, при этом так и не касаясь ее (но приближаясь на сколь угодно малое расстояние).

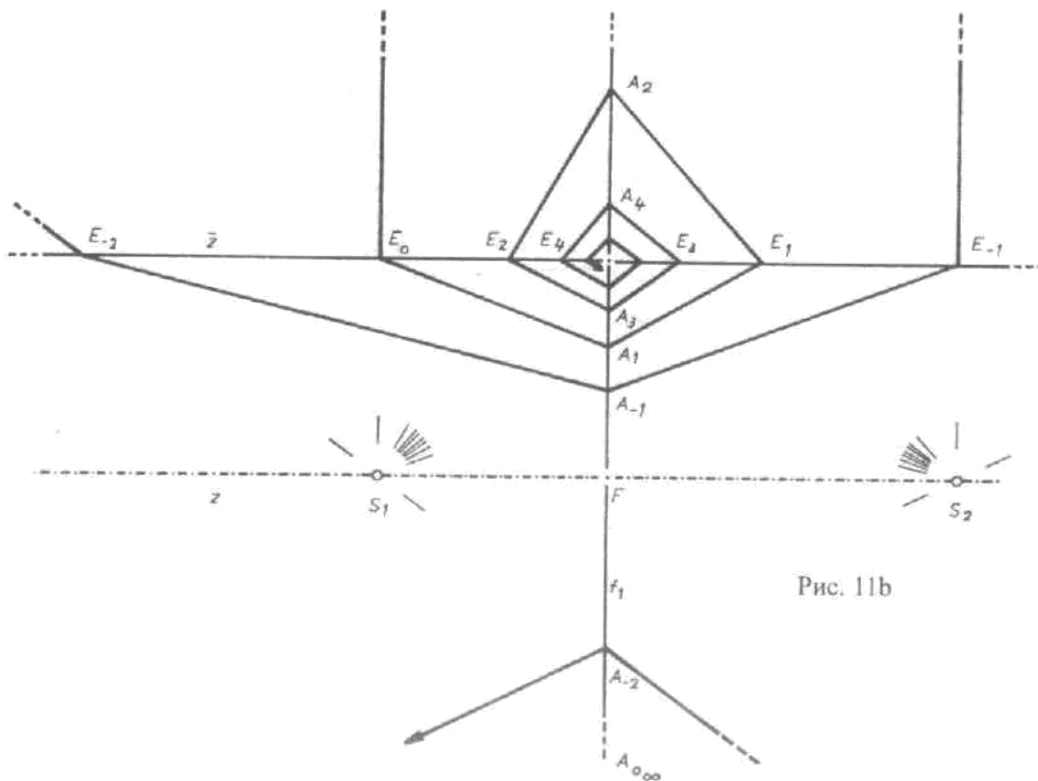


Рис. 11б

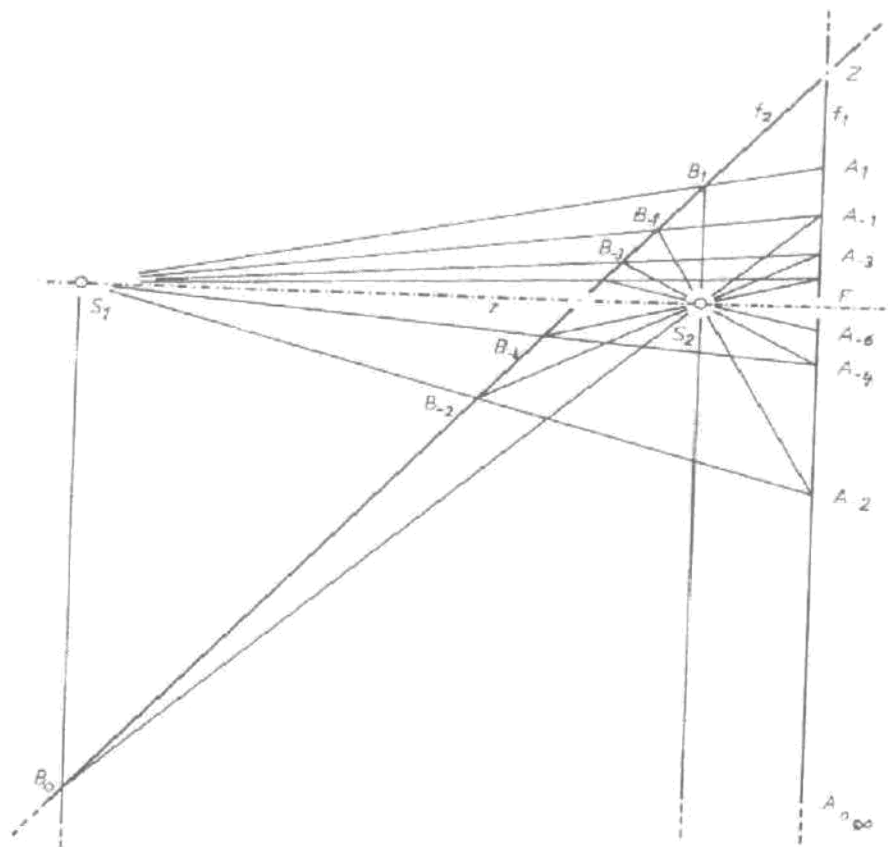


Рис. 12а

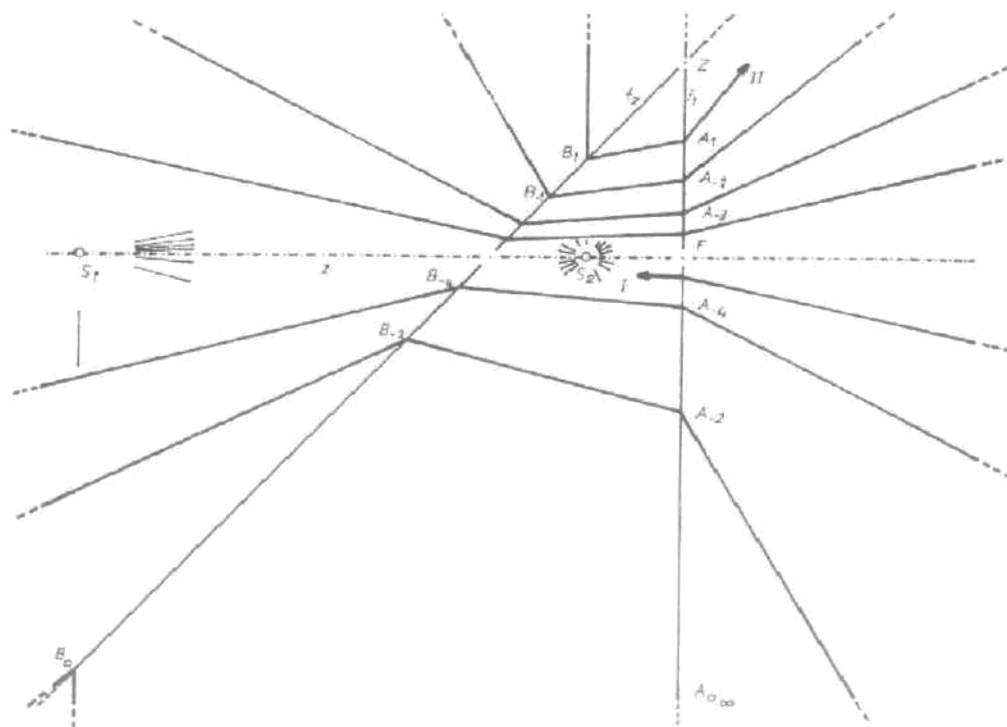


Рис. 12б

Можно нарисовать спираль и в другом направлении: от A_1 к $E_0, A_0, E_{-1}, A_{-1}, E_{-2}, A_{-2}, \dots$ и так далее. Отрезок E_0A_0 ведет точно в бесконечно удаленную точку прямой f_1 , затем отрезок A_0E_{-1} возвращает нас снова в конечную область. $E_{-2}A_{-2}$ становится тогда первым отрезком, проводящим нас сквозь бесконечность. Через бесконечность нас проводит и отрезок $A_{-2}E_{-3}$, и затем каждый раз два конечных и два бесконечных отрезка сменяют друг друга. С этой стороны спираль приближается к оси z . А последовательные точки шкалы A прыгают все более мелкими шажками вокруг другой точки концентрации — F .

На рис. 12а описанная только что часть шкалы сконструирована с помощью неподвижной прямой f_2 и центров S_1 и S_2 . Этот рисунок также приводит к спиралевидной конструкции (рис. 12б). Здесь конечные и бесконечные отрезки чередуются. Получившаяся фигура в направлении I с очевидностью все теснее с двух сторон примыкает к оси. Ее можно продолжить и в направлении II, и мы увидим, как она все теснее сжимает в своих объятиях центр.

Спиралевидные последовательности отрезков, стремящиеся к двум функциональным бесконечностям, точечному центру, с одной стороны, и оси — с другой, ведут себя как всякая логарифмическая спираль (спираль Бернулли), которая в бесконечной череде оборотов стремится, с одной стороны, к полюсу, а с другой стороны — к бесконечно удаленной прямой.

Приложение: гиперболическая мера

Равнозначность всех шагов может быть выражена даже в общей единой мере. Однако просто принимать в качестве этой меры число q оказывается нецелесообразным. По определенным соображениям более удобен $\log q$. Почему?

Рассмотрим двойное отношение (ZF, A_1A_3) двух последовательных шагов от A_1 до A_3 .

$$(ZF, A_1A_3) = \frac{\frac{ZA_3}{FA_3}}{\frac{ZA_1}{FA_1}} = \frac{\frac{ZA_3}{FA_3}}{\frac{ZA_2}{FA_2}} \cdot \frac{\frac{ZA_2}{FA_2}}{\frac{ZA_1}{FA_1}} = q^2.$$

Поскольку $(ZF, A_1A_3) = q^2$, то $\log (ZF, A_1A_3) = 2 \log q$.

«Логарифмическая мера» двух шагов действительно является удвоением «логарифмической меры» одного шага.

А «логарифмическая мера» обратного шага?

$$(ZF, A_2A_1) = \frac{1}{(ZF, A_1A_2)} = \frac{1}{q}$$

$$\log (ZF, A_2A_1) = -\log q$$

Обратные шаги имеют, таким образом, совершенно такую же меру, только с другим знаком.

Такая логарифмическая мера называется *гиперболической*. Она удобна для всех шкал с двумя точками концентрации (сказанное относится и к шкалам прямых).

Гиперболическая мера шага равна $\log q$ и является *действительной*; гиперболическая мера прыжка равна $\log (-q)$ и является *мнимой*.

15. Специальные случаи перспективной коллинеации

Оба основных элемента перспективной коллинеации — центр и ось — могут оказываться в специальных положениях.

Случай 1: *Ось может лежать в бесконечности.* Найдем образ четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ (Задание № 1, А.1) при таком особом положении оси, превратив одну из вершин в инициатора. Точки S_1 и S_2 находятся в бесконечности, и последовательности длин отрезков (рис. 1) ... ZA_1, ZA_2, ZA_3, \dots и ... ZB_1, ZB_2, ZB_3, \dots образуют геометрические прогрессии. Поскольку вторая точка концентрации на любой неподвижной прямой находится в бесконечности, приходится констатировать, что геометрическая прогрессия возникает на всякой прямой, проходящей через Z . Соответствующее преобразование четырехугольника мы назовем *центральным подобием (гомотетией)*. Оно меняет только величину фигуры, но не ее форму. Все четырехугольники имеют при одинаковых углах и одинаковые соотношения сторон. (Напомним, что фигуры, которые имеют при одинаковых углах и одинаковые соотношения сторон, называются подобными.)

Следует обратить внимание на то, что процессом роста охвачена не только граница фигуры, но и ее внутренность (рис. 2). Чтобы найти образ точки J_1 , нужно соединить ее с какой-нибудь вершиной (например, B_1) и провести через B_2 параллельную прямую.

Все точки плоскости двигаются от центра (или к центру). Движение тем больше, чем дальше точка расположена от центра гомотетии. На рис. 3 построена шкала концентрических окружностей (радиусы образуют геометрическую прогрессию). Когда одна окружность переходит в соседнюю, то же самое происходит и со всеми остальными. Каждая фигура на плоскости охвачена процессом роста.

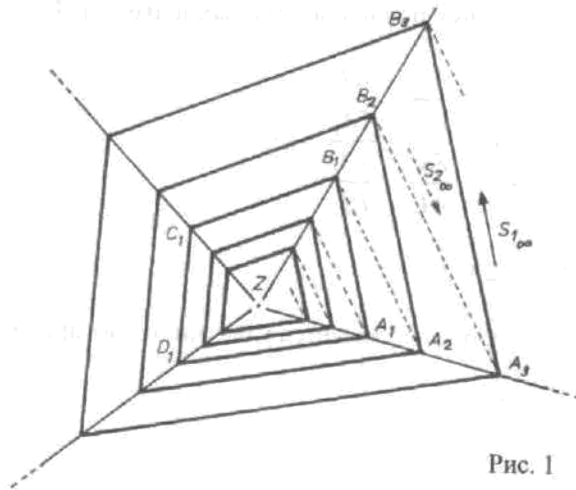


Рис. 1

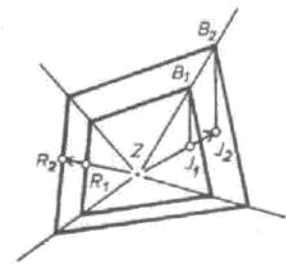


Рис. 2

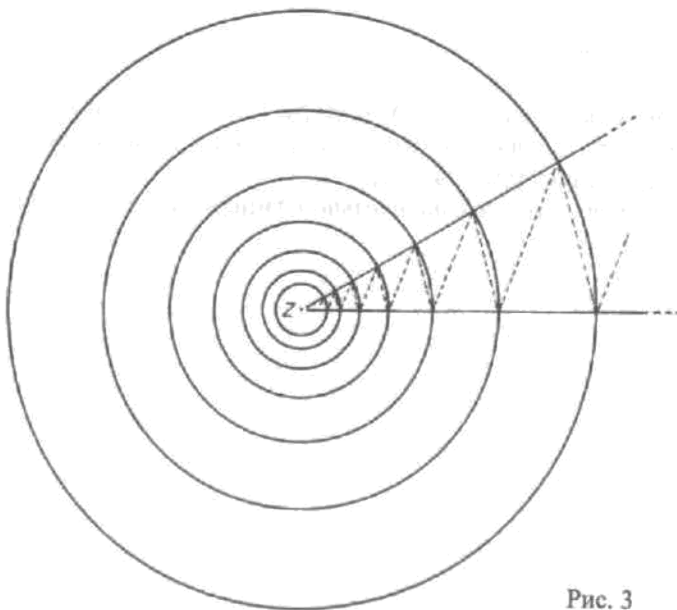


Рис. 3

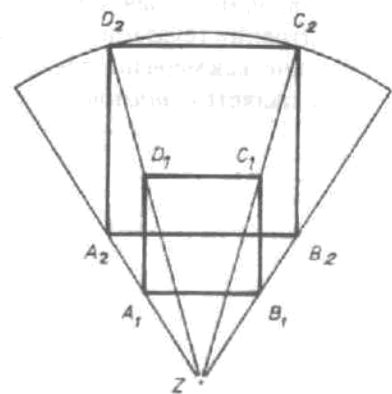


Рис. 4

Типичные задачи, решаемые с помощью гомотетии:

1. Впиши в круговой сектор квадрат таким образом, чтобы две его вершины лежали на дуге и по одной — на радиусах (рис. 4). Вначале нужно построить квадрат $A_1B_1C_1D_1$ заведомо недостаточного размера и затем увеличить его с помощью гомотетии с центром Z ; впрочем, можно начать и с большого квадрата, а затем его уменьшить. (Еще одна прекрасная задача: вычислить сторону вписанного квадрата как функцию радиуса и центрального угла.) При решении этой задачи увеличивается, естественно, только квадрат, но не сектор.
2. Впиши в круговой сектор квадрат таким образом, чтобы две его вершины лежали на радиусе.
3. Впиши квадрат в полукруг. Вычисли длину стороны.
4. Впиши квадрат в треугольник.
5. Построй образ круга при гомотетии; выбери центр в одном случае внутри, а в другом — вне круга.
6. Дан угол и точка P внутри него. Построй окружности, проходящие через точку P и касающиеся сторон угла.

Рис. 5 демонстрирует гомотетию с прыгающими шкалами.

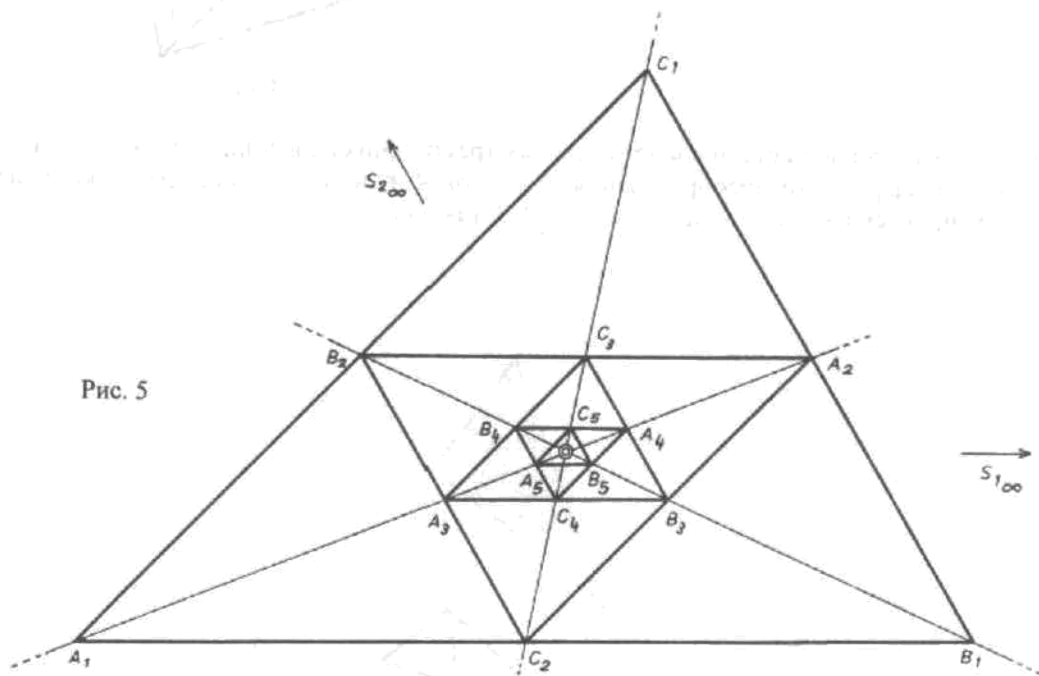


Рис. 5

Случай 2: Центр лежит в бесконечности (Задание № 1, А.2). Центр лежит бесконечно далеко в заданном направлении. Построй образ квадрата $A_1B_1C_1D_1$! Нужно выбрать точку-инициатора и заставить ее перепрыгнуть через ось.

Такое отображение называется *осевым аффинным преобразованием* (рис. 6, с прыжком). В чем его особенности? Поскольку центр лежит бесконечно далеко, все неподвижные прямые параллельны; все точки движутся или прыгают в направлении бесконечно удаленного центра (в аффинном направлении). Если аффинное направление перпендикулярно оси, то отображение называют *нормальным аффинным преобразованием*, в противном случае — *наклонным*. Квадрат переходит при аффинном преобразовании в параллелограмм. Вообще, параллельные прямые переходят в параллельные прямые (впрочем, другого направления), поскольку бесконечно удаленная прямая является в данном случае неподвижной и именно по ней движутся (или прыгают) бесконечно удаленные точки. Параллелограмм имеет иные отношения сторон, чем квадрат; зато простые отношения на отрезке сохраняются (центр квадрата переходит в центр параллелограмма). Все шкалы на пучках прямых гиперболические. Вторая прямая концентрации в каждом пучке (первая — ось) — это аффинное направление. Все шкалы на неподвижных прямых построены по принципу геометрической прогрессии.

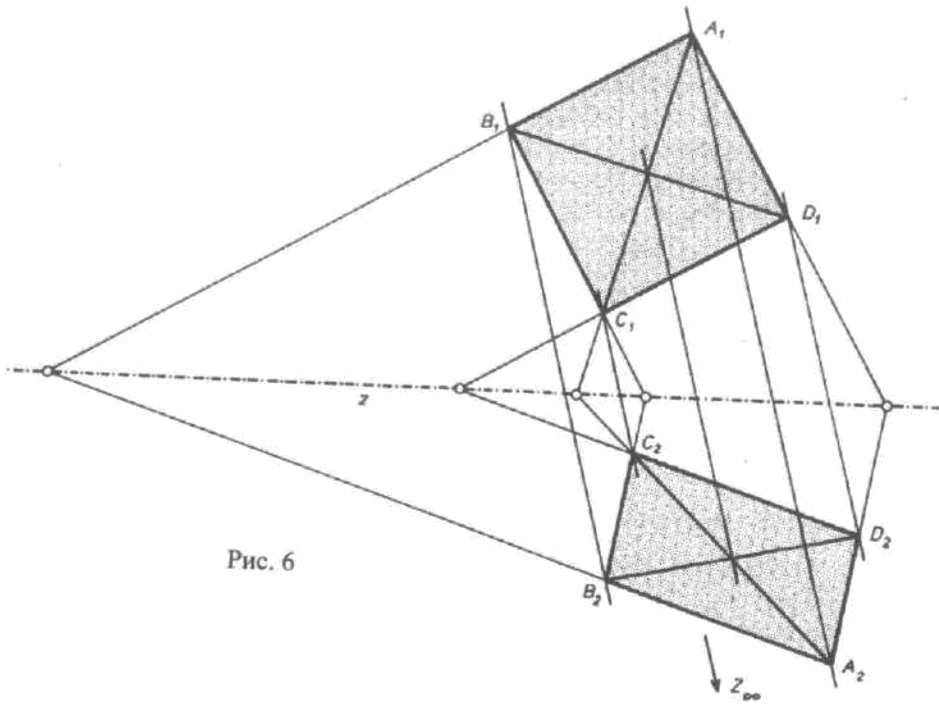


Рис. 6

На рис. 7 изображены шесть последовательных треугольников, вершины которых образуют шкалы («прыгающего» аффинного преобразования). Прыжок A_1A_2 проектируется из точки S_1 на прыжок B_1B_2 ; B_1B_2 проектируется из точки S_2 обратно на A_2A_3 и так далее.

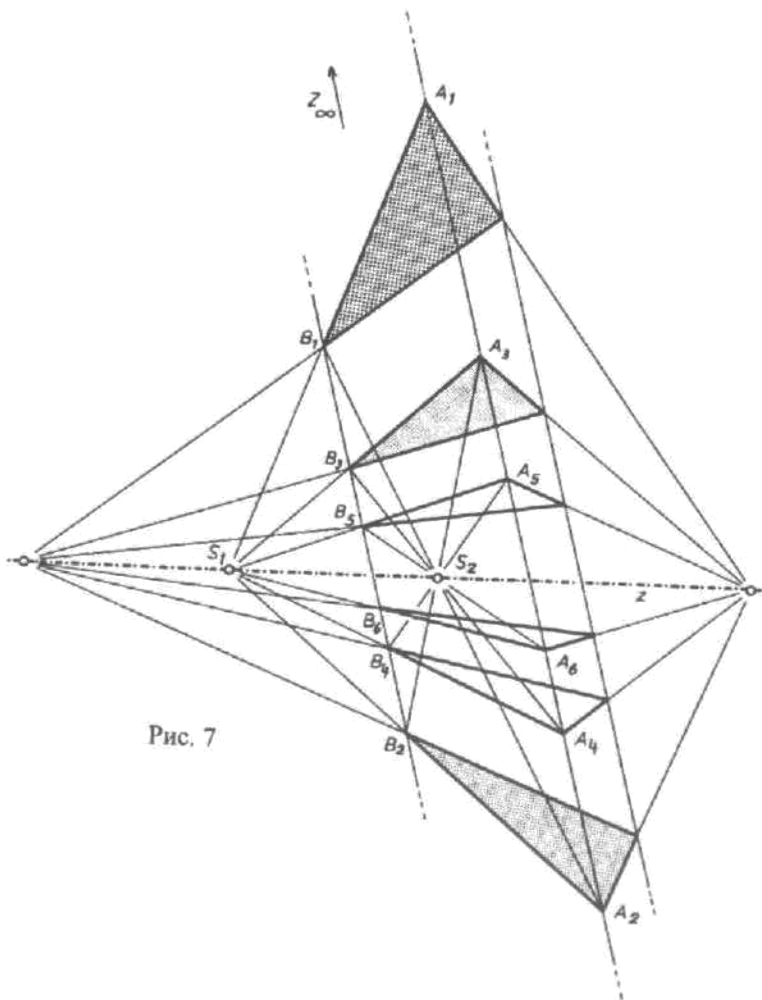


Рис. 7

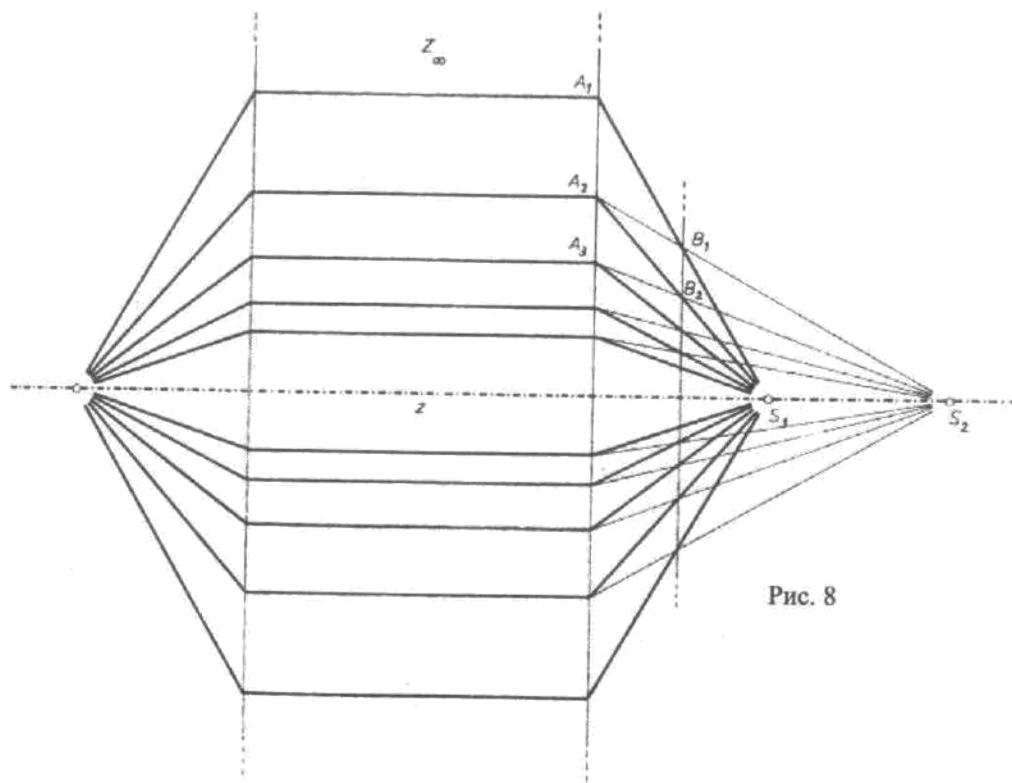


Рис. 8

Рис. 8 демонстрирует нормальное аффинное преобразование правильного шестиугольника со скользящей шкалой. Такое отображение называют также *осевым сжатием*.

А могут ли на бесконечности оказаться оба основных элемента — и ось, и центр? Если это имеет место, то центр лежит *на* оси, т.е. на бесконечно удаленной прямой. Вообще, позволительно ли центру и оси соединиться, быть инцидентными? Вначале исследуем конечный аналог этой ситуации.

Случай 3: Центр и ось находятся в конечной области, но *инцидентны* (Задание № 2, А.1). Даже если центр и ось инцидентны, мы все равно можем придерживаться двух основных законов перспективной коллинеации: вершины движутся по прямым, проходящим через центр, стороны вращаются

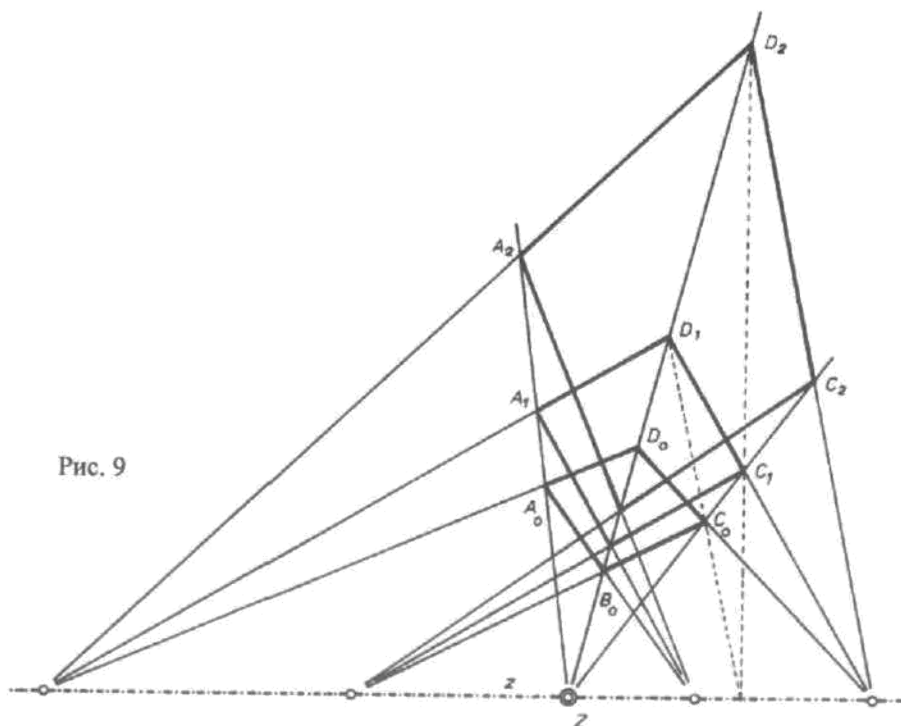


Рис. 9

вокруг точек пересечения с осью (рис. 9). Квадрат переходит при таком преобразовании в четырехугольник общего вида. Шкалы не могут быть гиперболическими, ведь точки концентрации Z и F совпадают. То же самое касается и шкал прямых; они имеют только одну прямую концентрации — ось z . Природу таких шкал мы исследуем в главе 19. Отображение данного вида называется *эляцией*⁷. Имеет смысл исследовать два ее специальных случая.

Случай 3а: Z является бесконечно удаленной точкой прямой z (Задание № 2, А.2). Нужно отобразить квадрат $A_1B_1C_1D_1$. Все неподвижные прямые параллельны оси (рис. 10). Квадрат превращается в параллелограмм. Параллельные прямые должны снова отобразиться в параллельные, поскольку бесконечно удаленная прямая является неподвижной. По ней движутся бесконечно удаленные точки. Особенно правильное строение демонстрируют точечные шкалы; все шаги в них являются совершенно одинаковыми в обычном смысле слова. Такое отображение называют *сдвигом*.

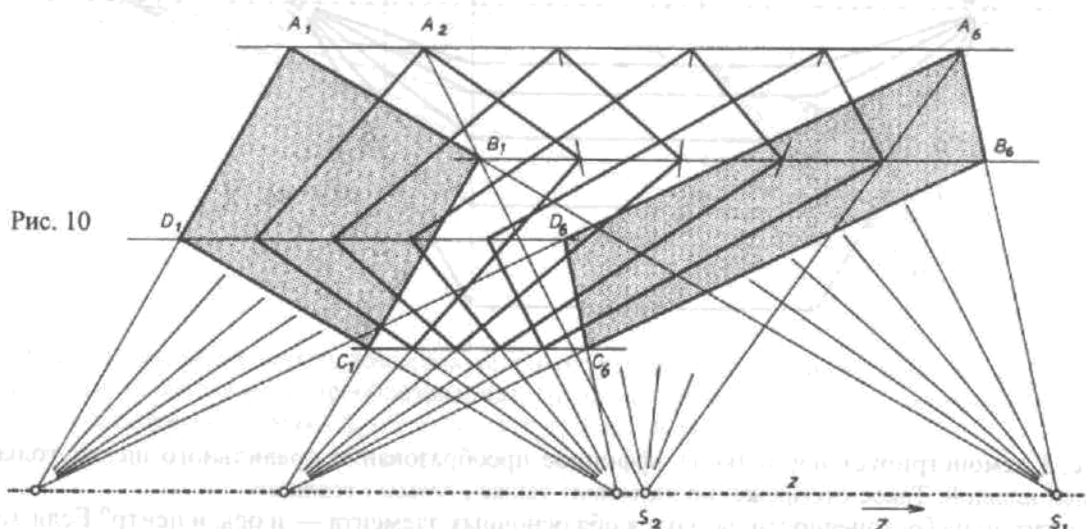


Рис. 10

Специальный случай такого среза играет важную роль в разделе планиметрии, занятом вычислением площадей простейших фигур. Рассмотрим треугольники с общим основанием и одинаковыми высотами (рис. 11). Все они равновелики, поскольку их можно разрезать на части, а из этих частей составить прямоугольник с таким же основанием и половинной высотой (рис. 12). Процесс разрезания и перекомпоновки не является метаморфозой. Другое дело сдвиг (рис. 13). Не только вершина C_1 переходит в вершину C_2 , по своей неподвижной прямой движется каждая точка треугольника — как лежащая на границе, так и внутренняя. Движение внутренней точки J_1 можно проследить, соединив ее с

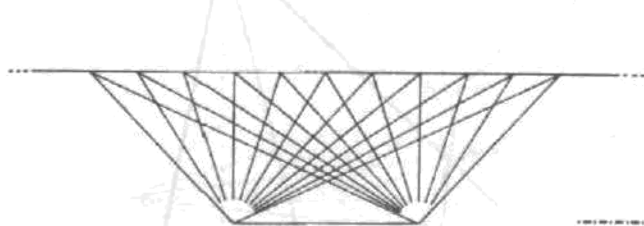


Рис. 11

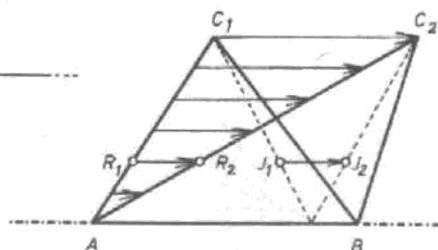


Рис. 13

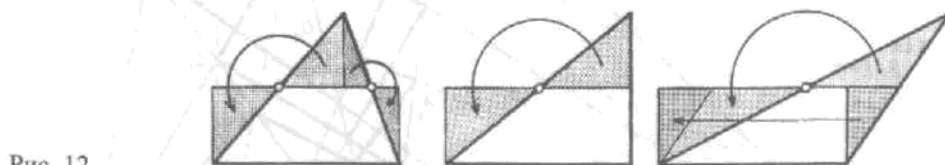
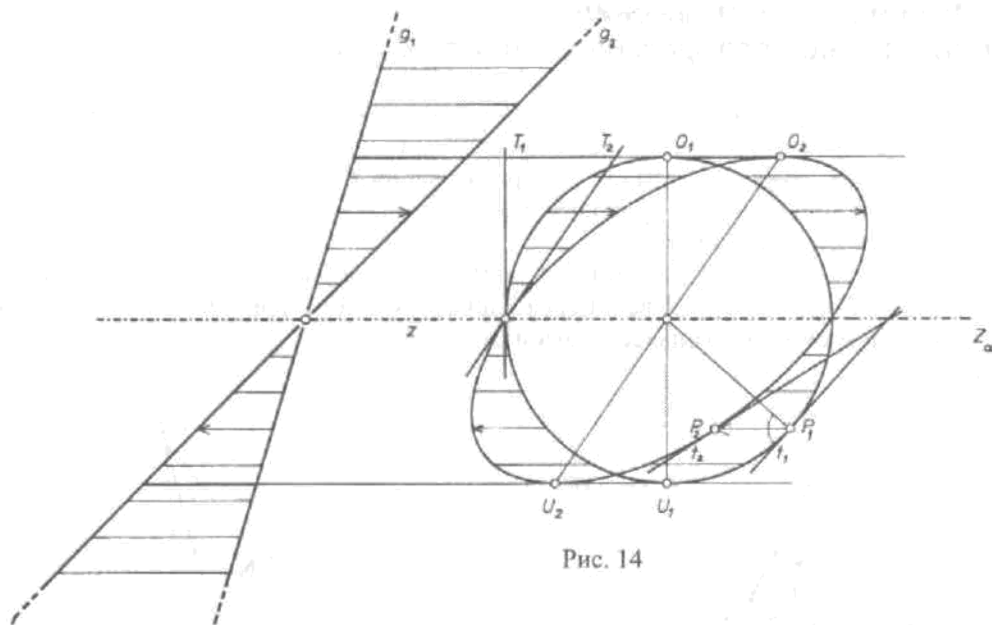


Рис. 12

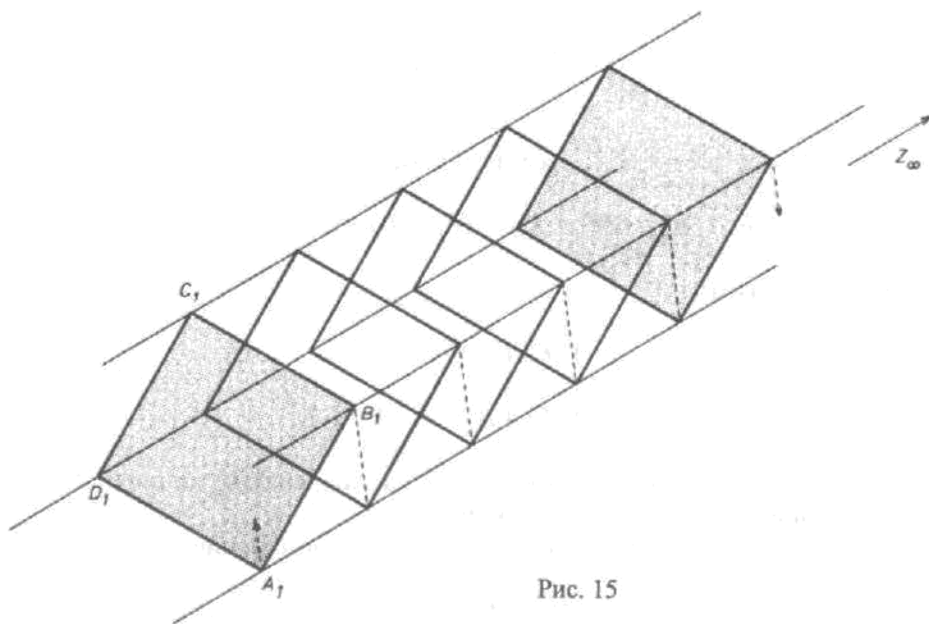
⁷ В русскоязычной математической литературе термин «эляция» обычно переводится как *особенная гомология*. — Прим. пер.



вершиной. Точки, находящиеся на одинаковой высоте, делают шаги одинакового размера. Слой скользит направо по слою тем дальше, чем выше он лежит над осью. Неподвижен только один слой — ось.

Все преобразование можно задать парой прямых (переходом из положения g_1 в положение g_2) (рис. 14). Под осью слои скользят в противоположном направлении. Фигуры, охваченные этим преобразованием, меняют свои размеры и форму. На рис. 14 показано, как срез превращает окружность в эллипс. (Тот факт, что окружность превращается именно в эллипс, а не овал, мы сумеем обосновать в следующих главах.) В заключение читатель может выполнить Задание № 3, пункты 1–3.

Случай 3б: Оба элемента — Z и z — находятся бесконечно далеко (Задание № 2, А.3). Нужно отобразить квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 15). Преобразование со всех точек зрения не особенно богато. Квадрат остается квадратом, он не меняет ни форму, ни размеры. Происходит чистый сдвиг, все время на один и тот же отрезок. Такое преобразование называется *параллельным переносом*. Оно является конгруэнтным преобразованием, т.е. образ любой фигуры может быть с абсолютной точностью совмещен со своим прообразом.



В следующей главе мы увидим, что «прыгающие» преобразования могут выступать в совершенно особой форме.

16. Гармоническое отражение⁸ — «прыгающее» отображение с особым шагом

На рис. 9 и 10 главы 14 вслед за эталонным прыжком A_1A_2 строится второй прыжок — A_2A_3 . Возникает вопрос: можно ли задать A_1A_2 так, чтобы прыжок A_2A_3 снова возвращал бы нас к A_1 , т.е. чтобы A_3 совпало с A_1 ? Прямая B_2S_2 должна в этом случае пройти через A_1 . Это возможно только тогда, когда мы задаем Z, A_1, A_2, S_1 и f_2 и только *затем* проводим z через S_2 (рис. 1 и 2). Возникающие при этом фигуры мы подробно рассмотрим в главе 18.

Если A_3 совпадет с A_1 , то A_4 совпадет с A_2 и так далее. «Шкала» постоянно колеблется между двумя точками A_1 и A_2 . Соответственно ведет себя и шкала B . Спираль из главы 14 имеет в этом случае только один виток, все время возвращаясь к самой себе.

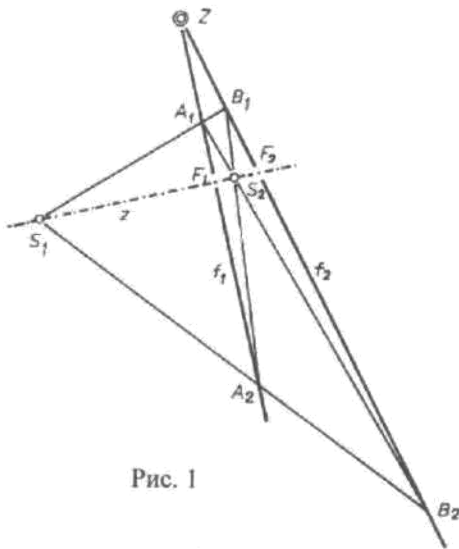


Рис. 1

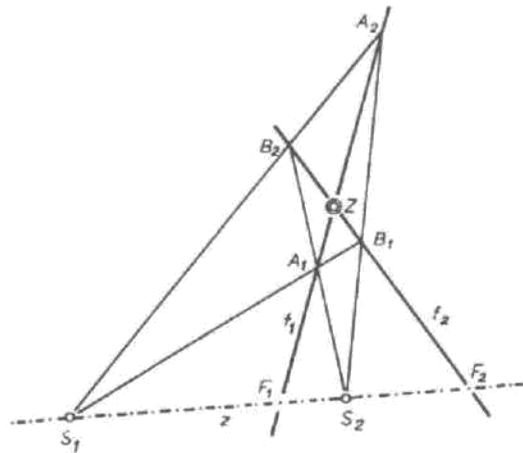


Рис. 2

Чему равно двойное отношение отрезка A_1A_2 ? Поскольку A_3 совпадает с A_1 :

$$(ZF, A_1A_3) = (ZF, A_1A_1) = \frac{\frac{ZA_1}{FA_1}}{\frac{ZA_1}{FA_1}} = 1.$$

Для двух шагов, от A_1 к A_2 и от A_2 к A_3 , всегда справедливо:

$$(ZF, A_1A_3) = (ZF, A_1A_2) \cdot (ZF, A_2A_3) = (ZF, A_1A_2)^2.$$

Из вышесказанного следует:

$$(ZF, A_1A_2)^2 = 1.$$

То есть

$$(ZF, A_1A_2) = \pm \sqrt{1} = \pm 1.$$

Решение +1 нас не интересует, поскольку в этом случае совпадают уже точки A_1 и A_2 . Кроме того, каждый прыжок имеет отрицательное двойное отношение.

Итак, прыжок A_1A_2 имеет в нашем случае особое двойное отношение

$$(ZF, A_1A_2) = -1,$$

⁸ В русскоязычной математической литературе принят также термин «гармоническая гомология». — Прим. пер.

то есть

$$\frac{ZA_2}{FA_2} = -1, \frac{ZA_1}{FA_1}$$

или

$$\frac{ZA_2}{FA_2} = -\frac{ZA_1}{FA_1}$$

Итак, простые отношения A_1 и A_2 равны с точностью до знака!

Если даны Z, z и A_1 , то A_2 нужно строить так, чтобы она *внешне* делила отрезок ZF в том же отношении, в каком A_1 делит этот отрезок *внутренне*. Конструктивно это можно сделать с помощью шкалы E на прямой \bar{z} . Шкала E имеет знаменатель -1 , т.е. она состоит из *симметричных прыжков* вокруг центра Z (рис. 3). Прыжок E_1E_2 проектируется из S_2 на A_2A_1 . Впрочем, для построения A_2 достаточно и одной точки S_1 .

Из рис. 3 мы видим, что:

$$\frac{ZA_2}{FA_2} = \frac{ZE_2}{FS_1} \quad (\text{подобие } \Delta A_2E_2Z \text{ и } \Delta A_2S_1F)$$

и

$$\frac{ZA_1}{FA_1} = \frac{ZE_1}{FS_1} \quad (\text{подобие } \Delta A_1E_1Z \text{ и } \Delta A_1S_1F)$$

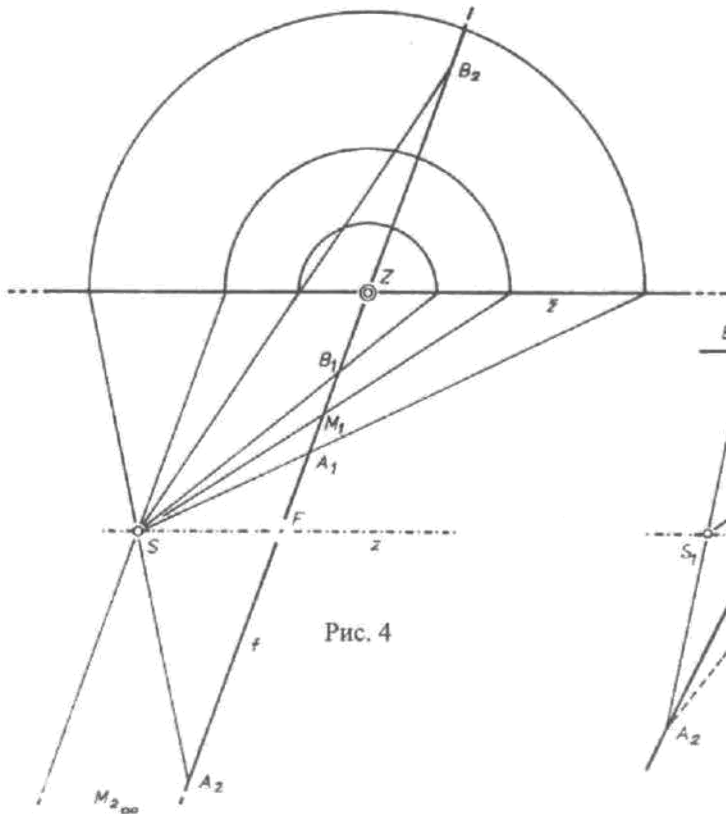


Рис. 4

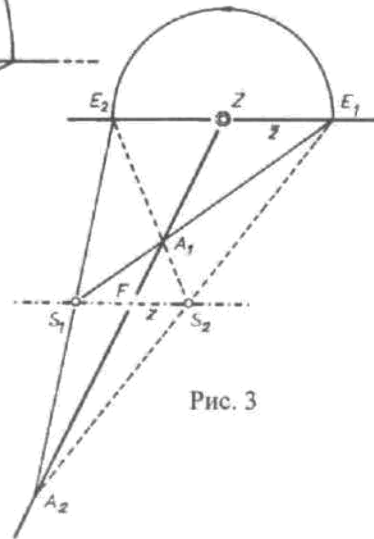


Рис. 3

Поскольку $ZE_2 = -ZE_1$, то действительно: $\frac{ZA_2}{FA_2} = -\frac{ZA_1}{FA_1}$.

То есть построенное A_2 действительно делит отрезок ZF внешне так же, как и A_1 делит его внутренне.

О паре точек A_1A_2 , которые делят внутренний и внешний сегменты отрезка ZF в одинаковом отношении, говорят, что они расположены *гармонически* в отношении к ZF . Другое принятое обозначение: говорят, что четыре точки Z, F, A_1, A_2 образуют *гармоническую четверку*.

Работа с гармоническими четверками требует навыка: вот точка движется по внутреннему сегменту отрезка ZF , и для каждого ее положения мы строим четвертую гармоническую точку на внешнем сегменте (рис. 4). Особенно важна точка M_2 , гармонически сопряженная с серединой M_1 относительно его концов F и Z . M_2 оказывается бесконечно удаленной точкой, поскольку соответствующий симметричный прыжок на прямой \bar{z} равен отрезку SF , и, следовательно, прямая, проходящая через S , параллельна f .

Если представить себе, что A_1 движется от M_1 в направлении F , то симметричный прыжок на \bar{z} удлиняется и A_2 приходит снизу к F . В точке F A_1 и A_2 совпадут. Если B_1 движется от M_1 по направлению к Z , то симметричный прыжок на прямой \bar{z} укорачивается и B_2 приближается сверху к центру. В точке Z B_1 и B_2 совпадают. Гармонические прыжки порождают на каждой неподвижной прямой *парное соответствие* точек, отображающее внутренний и внешний сегменты друг на друга. Такое отображение мы назовем *гармоническим отражением (гармонической гомологией)* относительно Z и F . Она является проекцией симметрии на прямой \bar{z} . Для такой симметрии *двойной* точкой, совпадающей со своим образом, является не только Z , но и бесконечно удаленная точка прямой \bar{z} . Z и F , в свою очередь, являются двойными точками гармонического отражения на f .

Пара двойных точек и произвольная пара A_1A_2 гармонических по отношению к ним точек *всегда разделяют* друг друга, т.е. невозможно добраться от A_1 до A_2 , не перейдя через одну из двойных точек. Две различные пары гармонических к Z и F точек, например A_1A_2 и B_1B_2 , напротив, *никогда не разделяются*, т.е. можно перейти от A_1 к A_2 , не встретив по дороге ни B_1 , ни B_2 . То же самое относится к парам A_1A_2 и M_1M_2 : от M_1 можно попасть наверх к M_2 , не задев ни A_1 , ни A_2 .

Принято также называть такое парное соответствие точек *гиперболической* или *противонаправленной инволюцией* (соответствующие точки, когда движутся, перемещаются в противоположных направлениях). Инволюция означает «укладывание». На рис. 5 на прямой \bar{z} нарисована геометрическая прогрессия симметричных прыжков (каждый прыжок равен половине предыдущего), а на прямой f — соответствующие пары гармонических точек. Возможно, именно возникающая при этом картина подвигла геометров на то, чтобы говорить об укладке, об инволюции. В последующих главах мы еще раз встретимся с этим и некоторыми другими видами инволюции.

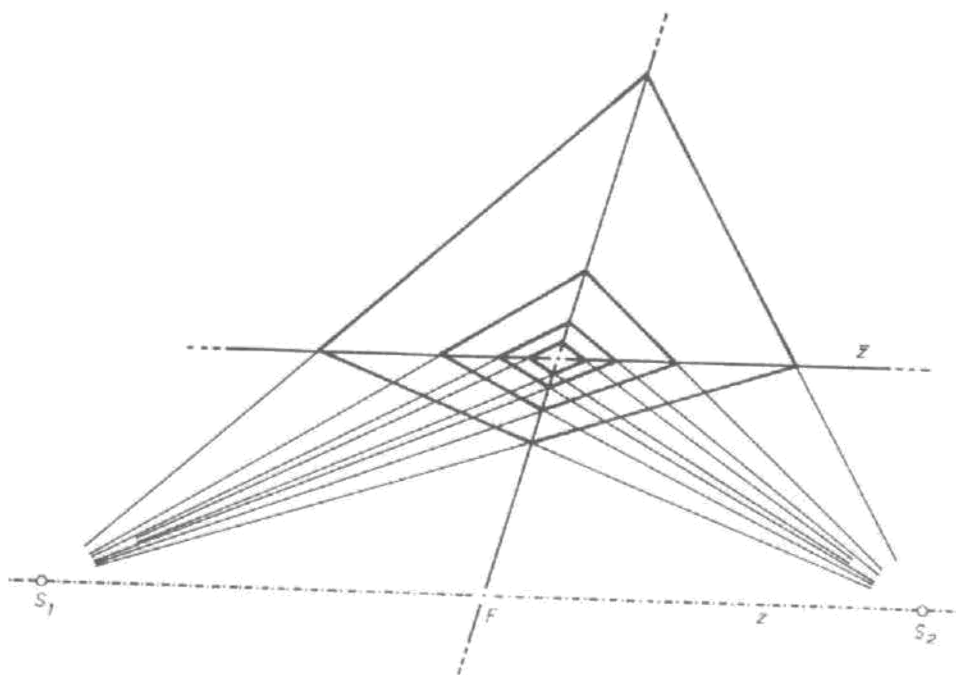


Рис. 5

Гармоническое парное соответствие (*сопряжение*) можно также рассмотреть в связи с понятием геометрического места. Если на плоскости даны две неподвижные точки A и B , то можно спросить: каково геометрическое место всех точек P , расстояние от которых до A и B находится в определенном постоянном отношении ($PA : PB = \text{const}$)? Можно найти это геометрическое место конструктивно (рис. 6). Мы фиксируем точки A и B (например, на расстоянии 4,5 см) и строим вокруг них окружности, радиусы которых находятся в определенном отношении (допустим, 2 : 1). Точки пересечения окружностей как

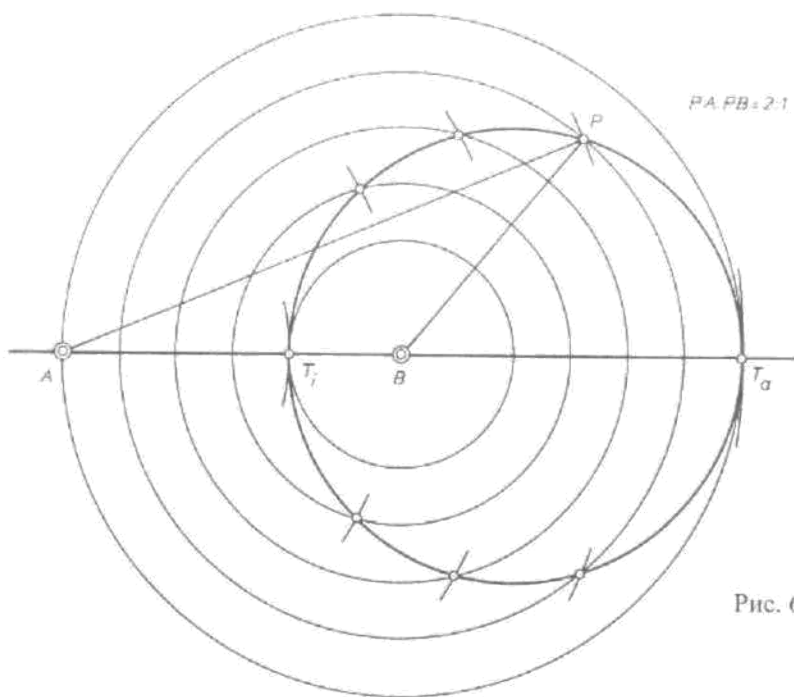


Рис. 6

раз и принадлежат к искомому множеству. Если говорить совсем конкретно: проводим окружность вокруг B , берем ее диаметр в качестве радиуса новой окружности с центром теперь уже в A и смотрим, где эти две окружности пересекутся. Окружность вокруг точки B не должна быть ни слишком большой, ни слишком маленькой. Необходимо, чтобы ее радиус был не менее трети длины отрезка AB и не превышал этой длины. В названных крайних случаях окружности в точности касаются, и мы получаем внешнюю T_2 и внутреннюю T_1 точки для простого отношения $2 : 1$. Четыре получившиеся точки (вместе с A и B) образуют гармоническую четверку. Промежуточные пары окружностей порождают по две точки пересечения, которые сами расположены на окружности с диаметром T_1T_2 . Эта окружность называется *окружностью Аполлония*.

Почему построенные нами точки сами лежат на окружности? Потому что биссектриса внутренних и внешних углов треугольника делит противоположную сторону внутренне и внешне в отношении прилежащих сторон (рис. 7). Проведем полуокружность с радиусом a вокруг вершины C . Биссектрисы являются высотами в равнобедренных треугольниках C_1CB и C_2CB . Поскольку C_1B параллельна w_2 , а C_2B параллельна w_1 , мы имеем:

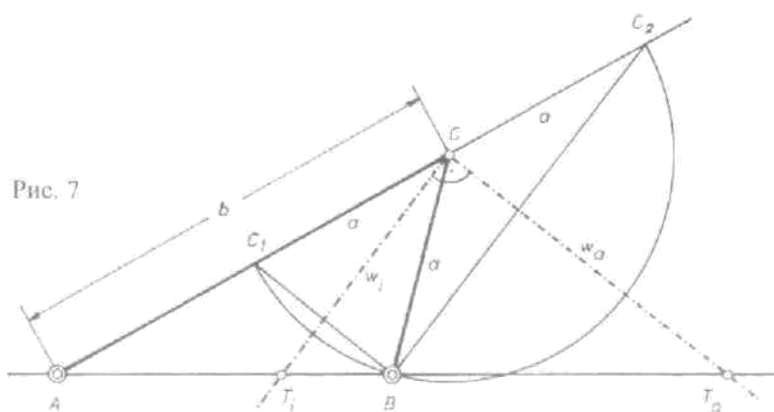


Рис. 7

$$\frac{AT_1}{BT_1} = -\frac{b}{a} \quad (\text{подобие } \Delta ACT_1 \text{ и } \Delta AC_2B)$$

и

$$\frac{AT_2}{BT_2} = \frac{b}{a} \quad (\text{подобие } \Delta ACT_2 \text{ и } \Delta AC_1B)$$

Итак, точки пересечения биссектрис, проведенных из вершины C , внутренне и внешне делят основание треугольника в отношении сторон AC и BC . Если зафиксировать основание AB и варьировать другие стороны так, чтобы их отношение осталось постоянным, то вершина C обязана двигаться по окружности Фалеса с диаметром $T_a T_b$. Это связано с тем, что рассматриваемые нами биссектрисы (всех

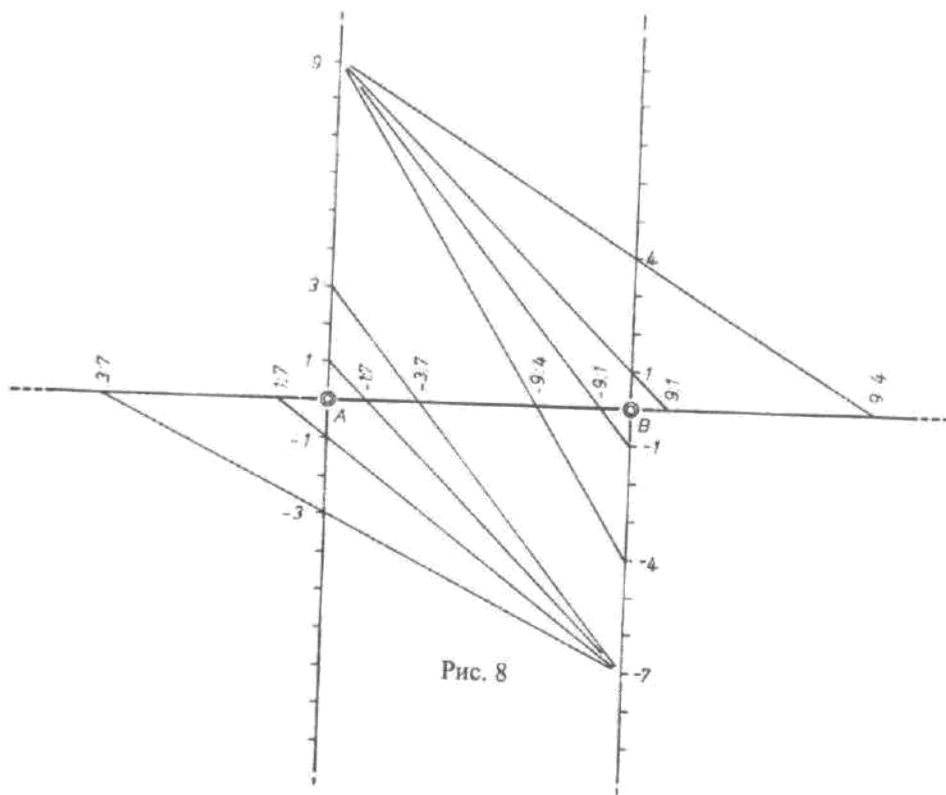


Рис. 8

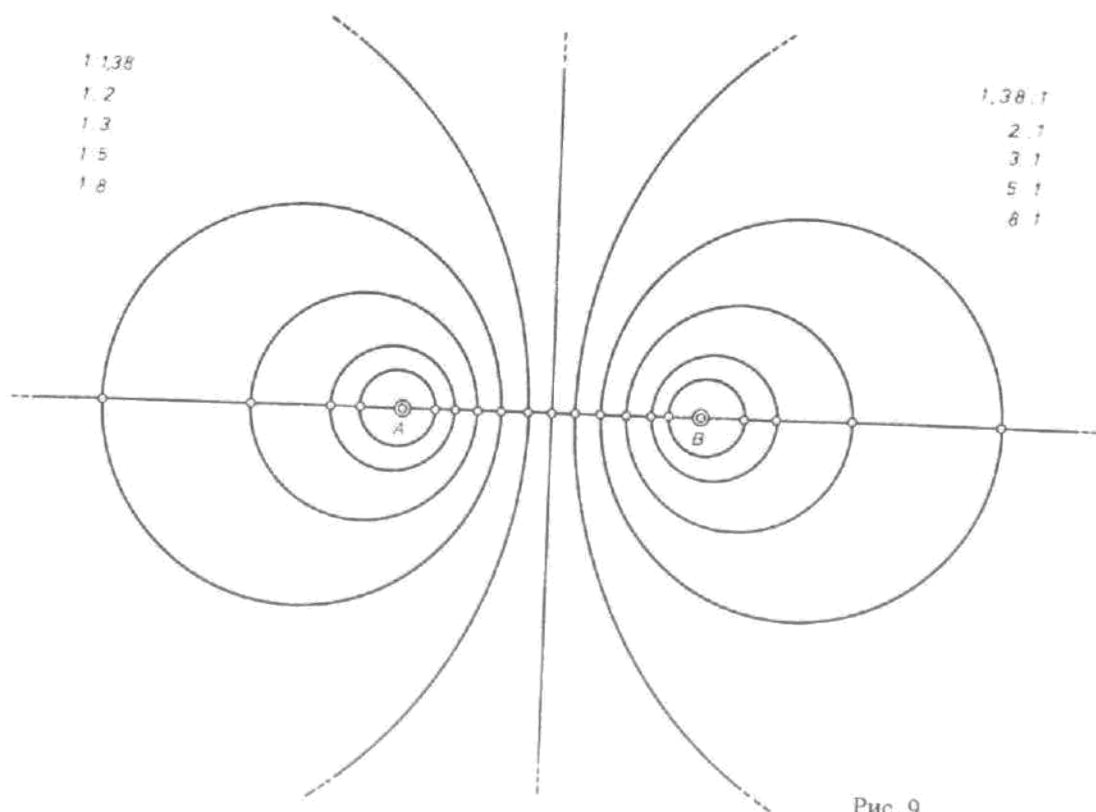


Рис. 9

треугольников) проходят через точки T_0 и T_1 и всегда взаимно перпендикулярны друг другу⁹. Таким образом, окружность Аполлония оказывается частным случаем окружности Фалеса.

Рис. 8 показывает, как можно сконструировать пары сопряженных точек, находящихся в разных целочисленных отношениях.

На рис. 9 с помощью рис. 8 построены окружности Аполлония с различными отношениями отрезков. Гармоническое парное соответствие становится в этом случае особенно наглядным.

Чем больше окружность Аполлония, тем ближе соответствующее отношение находится к $1 : 1$. Достичь его мы можем только для точек срединного перпендикуляра и бесконечно удаленной прямой. Окружности Аполлония вырождаются в пару таких особенных прямых. Соответствующая инволюция порождает особую пару точек: середину AB и бесконечно удаленную точку.

Из сказанного следует:

Существует совершенно особый случай перспективной коллинеации, хотя центр и ось и не занимают при этом какого-либо особого положения. Если точка переходит в свою гармонически сопряженную (по отношению к Z и F), то то же самое происходит и со *всеми* остальными точками и соответственно со *всеми* прямыми (кроме неподвижных элементов), поскольку двойное отношение всегда равно -1 . На *каждой* неподвижной прямой, проходящей через Z , возникает гармоническое соответствие между точками, и в *каждой* неподвижной точке на z возникает гармоническое соответствие между прямыми. Такая особая перспективная коллинеация называется поэтому гармоническим отражением (гомологией). Она порождает на плоскости парное соответствие точек и прямых (проходящих через Z и лежащих на z).

Нам прекрасно знакомы специальные случаи этого отображения: если ось гармонической гомологии находится в бесконечности, то она превращается в *центральную симметрию*. Если, наоборот, на бесконечности находится центр, то отображение в общем случае превращается в *косую осевую симметрию*. В специальном случае, когда центр является бесконечно удаленной точкой прямой, перпендикулярной оси, гармоническое отражение становится хорошо известной нам *осевой симметрией*.

В случае элиции (особенной гомологии) (Z лежит на z) гармоническое отражение невозможно, поскольку здесь невозможны прыжки.

⁹ Понятие «окружность Фалеса» связано с тем обстоятельством, что теорема о вписанном угле, опирающемся на диаметр и равном 90° , известная в России как «основное свойство окружности», на Западе носит имя Фалеса. В свою очередь, в России название «теорема Фалеса» прочно закрепилось за одной из теорем об отрезках, высекаемых параллельными прямыми. — *Прим. пер.*

17. Только линированы или только центрированы?¹⁰ Теорема Дезарга

В предыдущих главах мы с вами рассмотрели последовательности перспективных фигур. Даже гомотетичные фигуры оказались не только центрированными, но и линированными: взаимно параллельные стороны проходят через неподвижные точки на бесконечно удаленной оси.

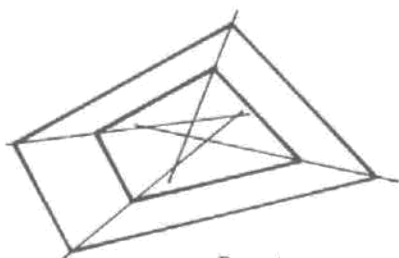


Рис. 1

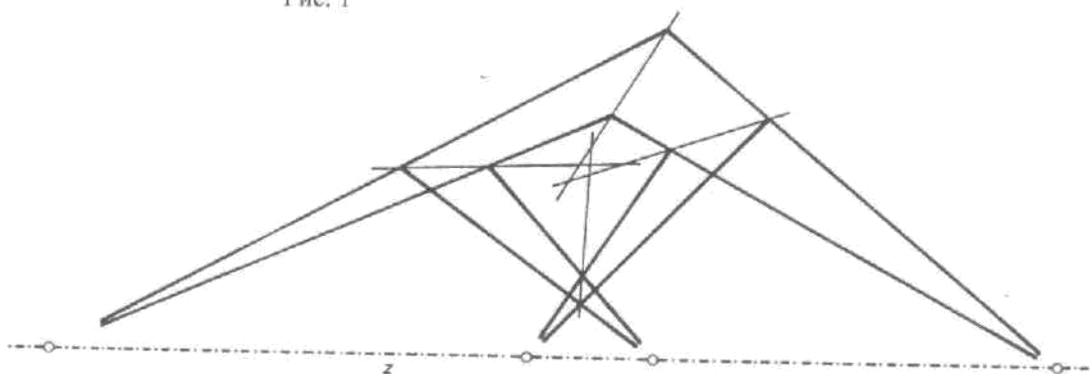


Рис. 2а

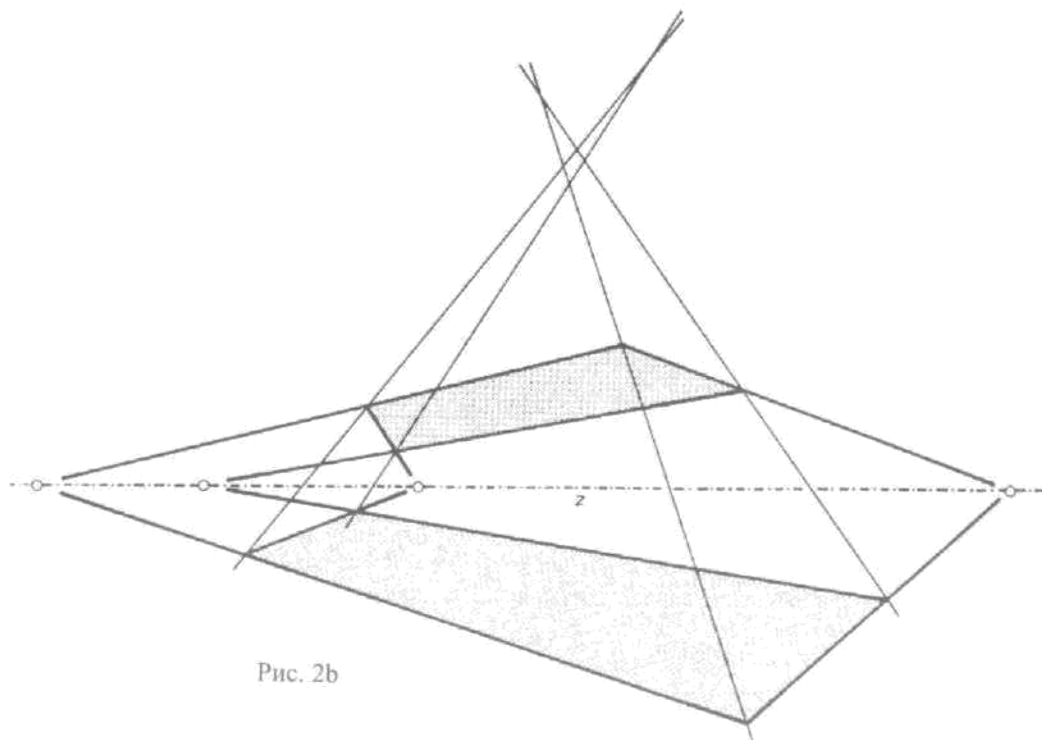


Рис. 2б

¹⁰ В более привычной терминологии: «перспективны относительно оси» и «перспективны относительно центра». — Прим. пер.

Можно применить к четырехугольнику не перспективное, а *только* линейное преобразование. На рис. 1 стороны одного четырехугольника смещены параллельно сторонам другого; оба четырехугольника, таким образом, линированы, но общего центра у них нет. Четырехугольники на рисунках 2а и 2б также линированы, но не центрированы. Они пока еще связаны друг с другом осью; но эта связь слабее, эфемернее соотношения перспективных (центрально-линейных) фигур.

Возможна и двойственная ситуация: четырехугольники на рис. 3а и 3б центрированы, но общей оси не имеют. То же самое может быть продемонстрировано на примере подходящим образом подобранных пяти-, шести- и так далее угольников. Такие многоугольники могут быть только *центрированными* или только *линированными*; а могут, разумеется, находиться в общем положении.

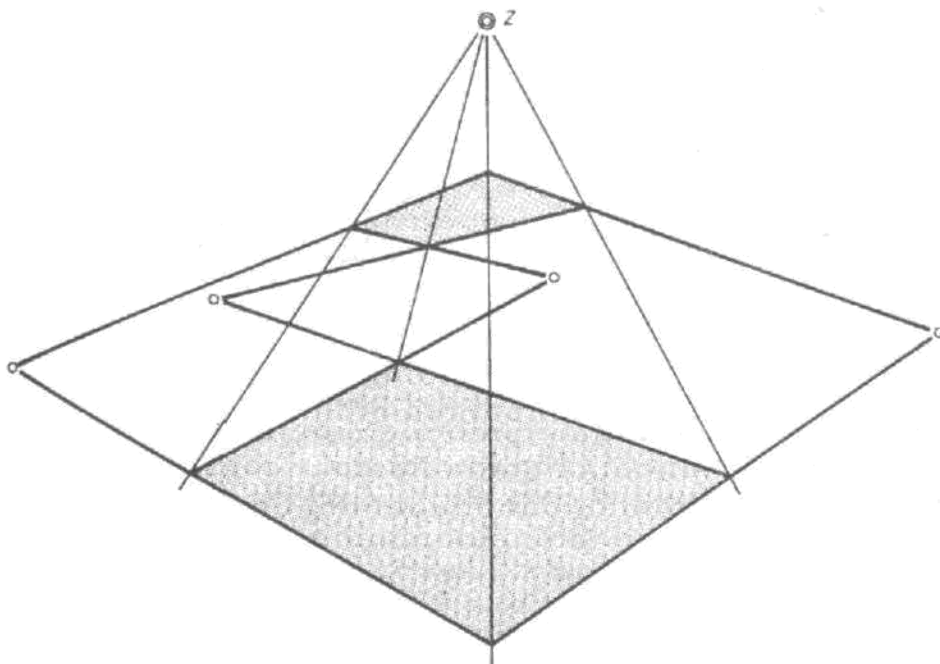


Рис. 3а

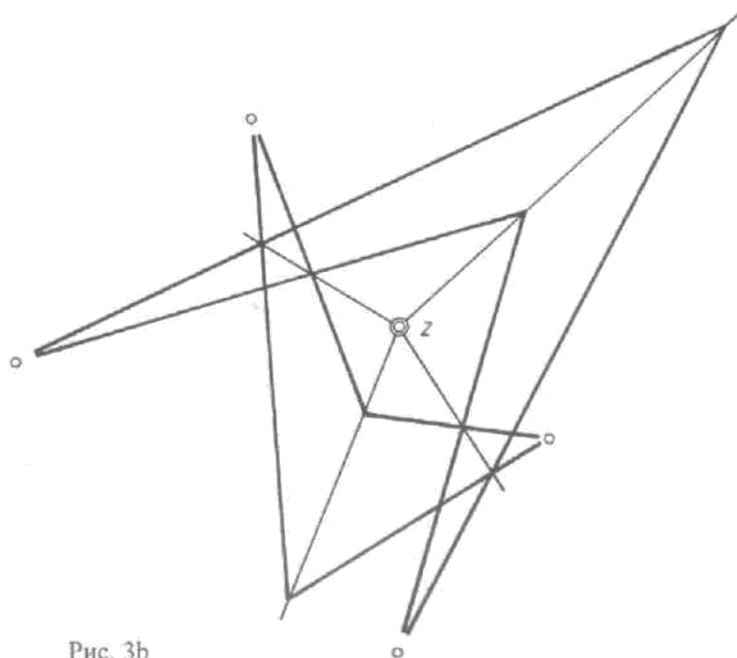
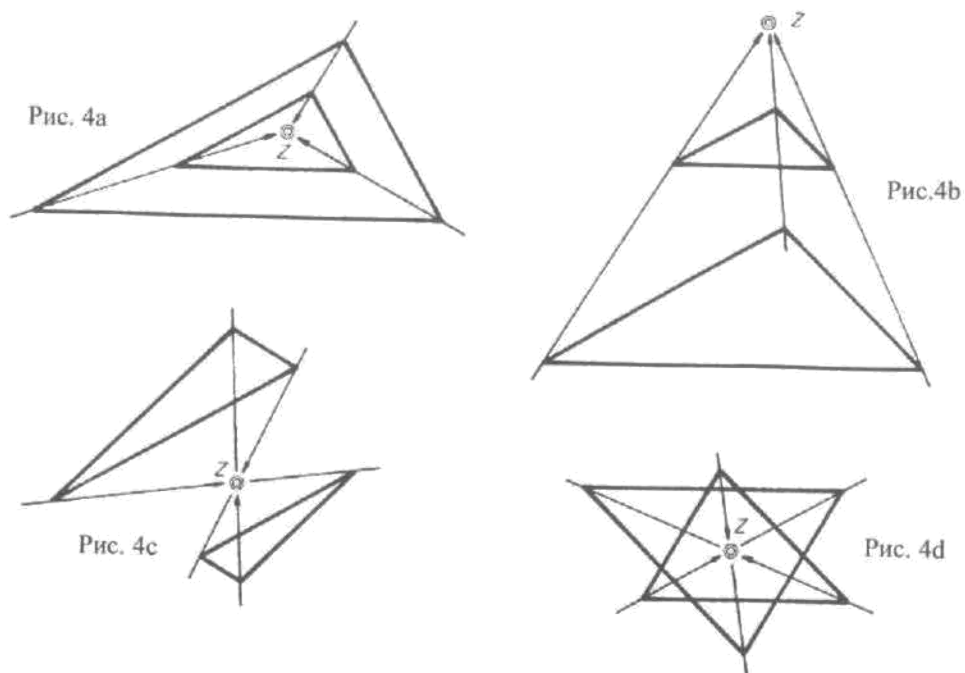
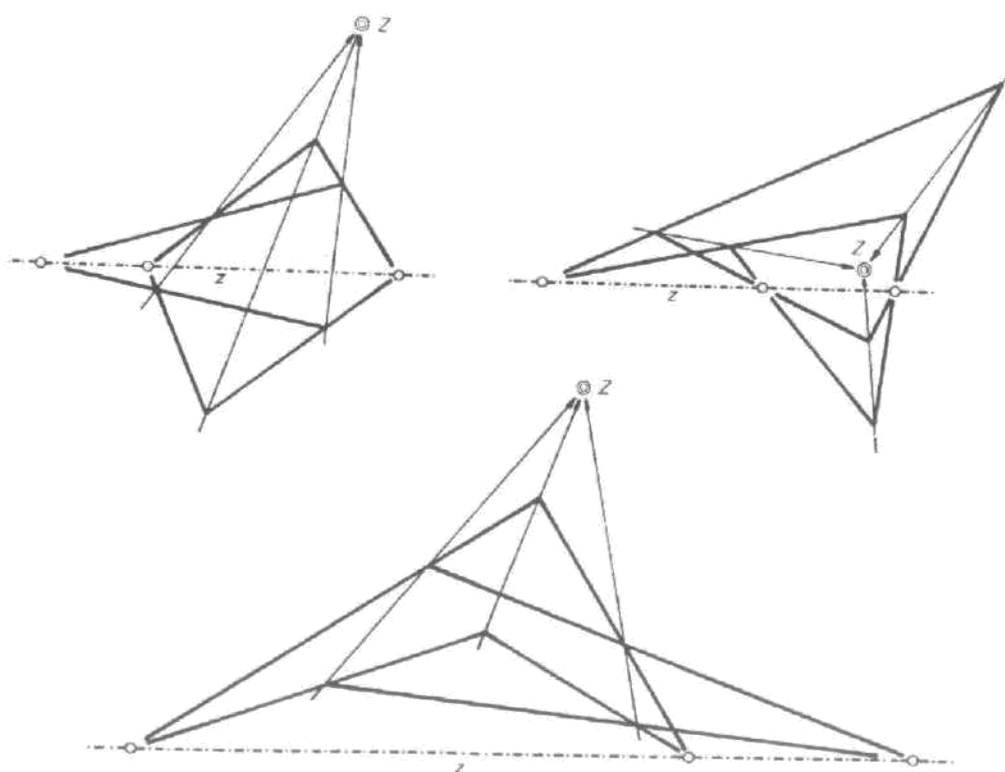


Рис. 3б



Серьезное исключение составляют треугольники: можно параллельно сдвинуть стороны треугольника — сколько бы мы этого ни делали, все равно прямые, соединяющие соответствующие вершины, сойдутся в общем центре (рис. 4). На рис. 5 изображены три пары треугольников, линированных общей осью: и каждый раз сам собой находится центр. Фигура может, как амеба, принимать любой облик, а связь все равно остается.



Можно убедиться в верности и двойственного утверждения: нарисуем какую-либо пару центрированных треугольников — каждый раз точки пересечения соответствующих сторон окажутся на одной оси (пример на рис. 6).

В противоположность остальным многоугольникам невозможно найти ни одной пары треугольников, которые были бы или только *центрированы*, или только *линированы*. Существует теорема, которая гласит, что два треугольника всегда либо *линированы*, и *центрированы*, либо ни то, ни другое. Эта важная теорема о расположении двух треугольников была открыта уже в первой половине XVII столетия французским математиком и архитектором Жераром Дезаргом (1593 – 1662) и называется в его честь *теоремой Дезарга*. Она имеет фундаментальное значение в системе геометрии. Мы еще вернемся к ее важнейшим следствиям.

Теорема справедлива независимо от того, находятся два треугольника в одной плоскости или нет. Если они лежат в различных плоскостях, то она непосредственно вытекает из пространственных аксиом (рис. 7). Оба треугольника линируются в точках F_a, F_b и F_c прямой, являющейся пересечением плоскостей треугольников. Пары прямых $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ и (c_1, c_2) вследствие этого не могут скрещиваться, но имеют по одной «общей» плоскости. Эти три (различные!) общие плоскости образуют трехгранник, ребра которого являются соединительными прямыми соответствующих вершин двух треугольников. Но три ребра трехгранника всегда проходят через одну точку. Это и есть тот центр, который центрирует оба треугольника.

Подобная фигура уже встречалась нам (гл. 3, рис. 2). Она возникает, когда один треугольник центрально проектируется на другой. Мы доказали, что в таком случае треугольники должны быть также и линированы.

В ситуации, когда два треугольника лежат в различных плоскостях, теорема Дезарга является почти очевидным следствием основных утверждений о взаимном расположении плоскостей, прямых и точек. Другое дело, когда треугольники лежат в одной плоскости. Внутри плоскости мы не имеем никакого права апеллировать к пространственным аксиомам. Приходится привлекать окружающее нашу плоскость пространство. Это указывает на то, что теорема Дезарга по сути коренится в пространстве.

Пусть оба треугольника принадлежат общей плоскости E и линируются в точках F_a, F_b и F_c общей осью z (рис. 8). Проведем через z вспомогательную плоскость H . В этой плоскости мы выберем произ-

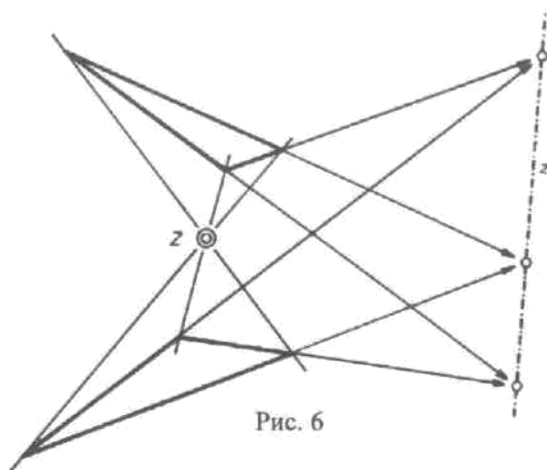


Рис. 6

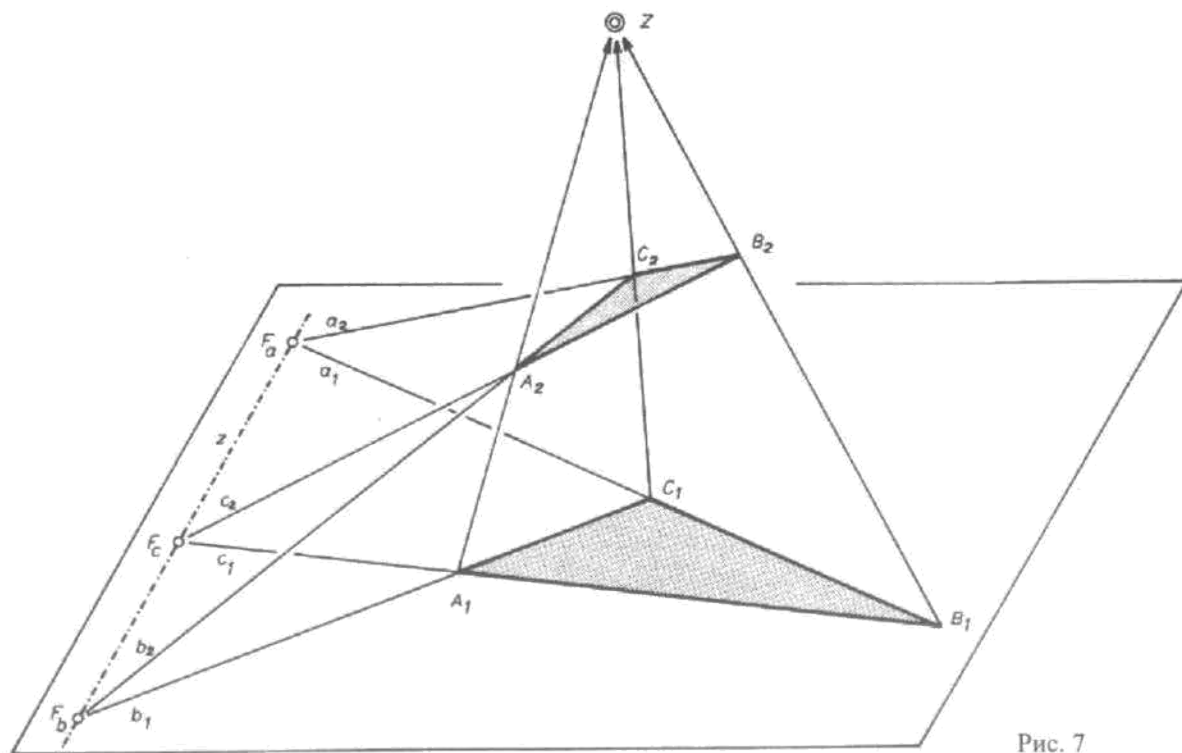


Рис. 7

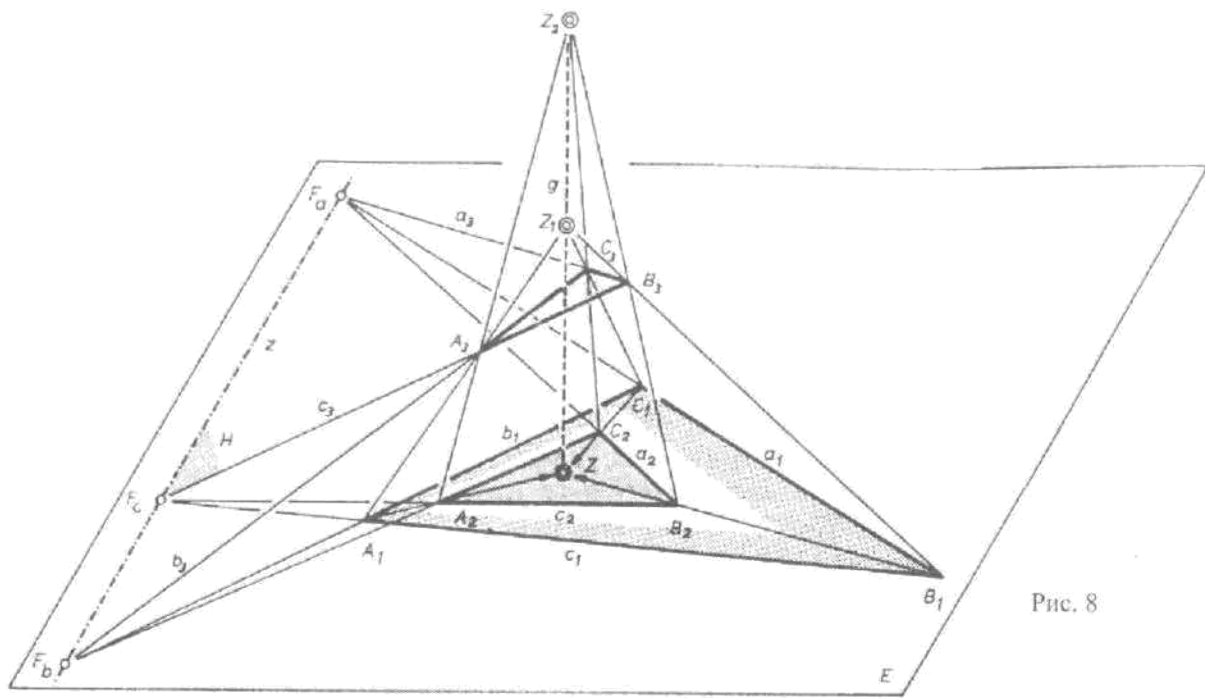


Рис. 8

вольный треугольник $A_3B_3C_3$, лишь бы он только был линирован с первыми двумя, причем в тех же точках. Ранее мы уже показали, что линированные треугольники в различных плоскостях всегда должны иметь центр. Пусть Z_1 — центр первого и третьего треугольников, а Z_2 — второго и третьего. Прямая, соединяющая Z_1 и Z_2 , пересекает плоскость E в общем центре Z первого и второго треугольников. Тем самым показано, что линированные треугольники имеют также и общий центр, даже если они лежат в одной плоскости.

Если дан центр Z и нужно доказать существование оси, то следует выстроить чертеж 8 в обратном порядке: выбираем прямую g , проходящую через Z , и на ней два центра Z_1 и Z_2 . Центры в пространстве и оба треугольника образуют вместе тетраэдры, которые, пересекаясь, дают третий треугольник. Плоскость этого третьего треугольника и плоскость E пересекаются по оси.

Иллюстрация к пространственной конфигурации Дезарга (рис. 7) включает в себя 5 плоскостей: три плоскости проходят через Z , а две плоскости их рассекают. Фигура имеет одну особенность, а именно: каждая из ее вершин (точек пересечения трех плоскостей) может быть превращена в центр Z : тем самым определяются два центрированных треугольника, а также их ось. Можно, например, выбрать в

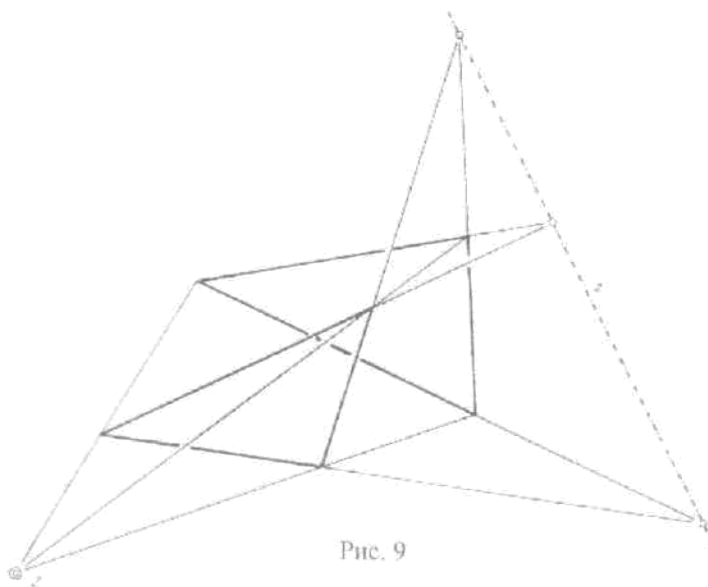


Рис. 9

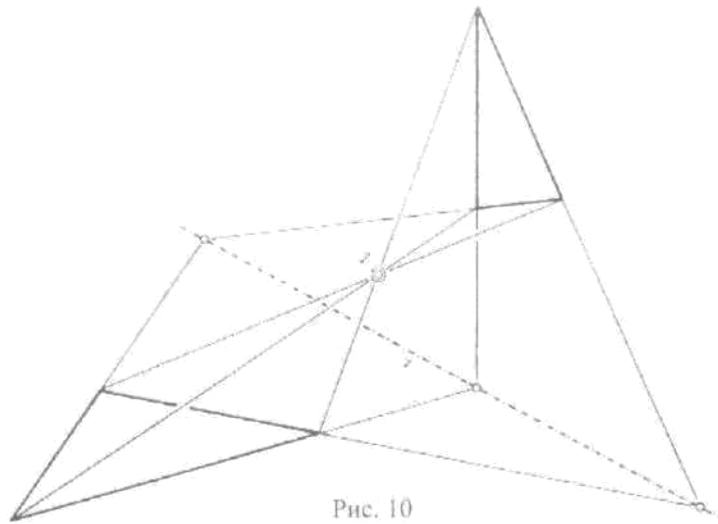


Рис. 10

качестве центра вершину слева внизу (Задание № 1 к настоящей главе). На рис. 9 выделены два центрированных треугольника и ось. Можно выбрать в качестве центров и другие вершины (дальнейшие примеры на рис. 10 и 11).

Центр можно выбрать 10 различными способами! Дело в том, что наша картинка наряду с пятью плоскостями имеет 10 вершин и 10 линий пересечения. Все они между собой совершенно равноправны: на каждой прямой лежат 3 точки, и через каждую точку проходят три прямые. Фигуры, построенные из совершенно равнозначных элементов, называются *конфигурациями*. Наше множество из пяти плоскостей называется пространственной конфигурацией Дезарга; позже мы познакомимся еще с одной конфигурацией, двойственной ей, пространственным пятиугольником. Плоскостная конфигурация Дезарга двойственна (в плоскости) сама себе. Она также составлена из 10 равнозначных точек и прямых; причем считаются только точки, через которые проходят *три* прямые. И здесь теорема Дезарга может быть проиллюстрирована 10 различными способами.

10 ролей для точек:

- 1 центр
- 2 × 3 вершины треугольников
- 3 точки пересечения соответствующих сторон

10 ролей для прямых:

- 1 ось
- 2 × 3 стороны треугольников
- 3 соединительные прямые соответствующих вершин

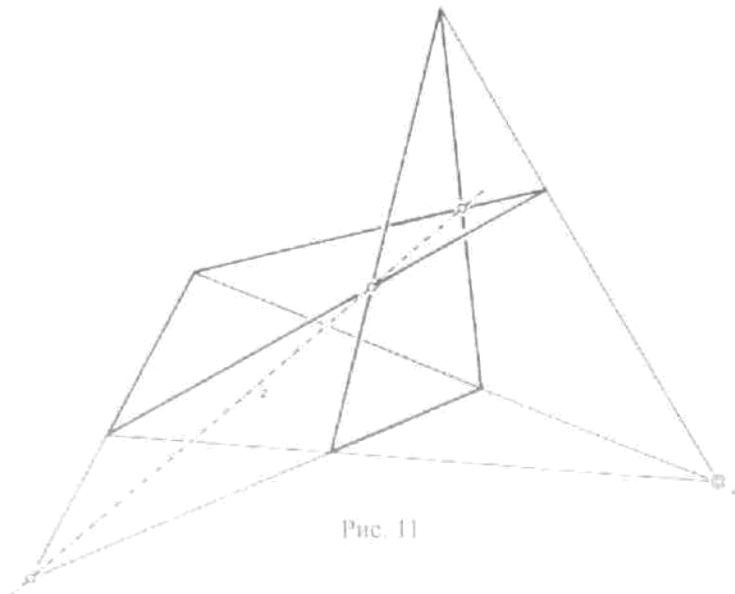


Рис. 11

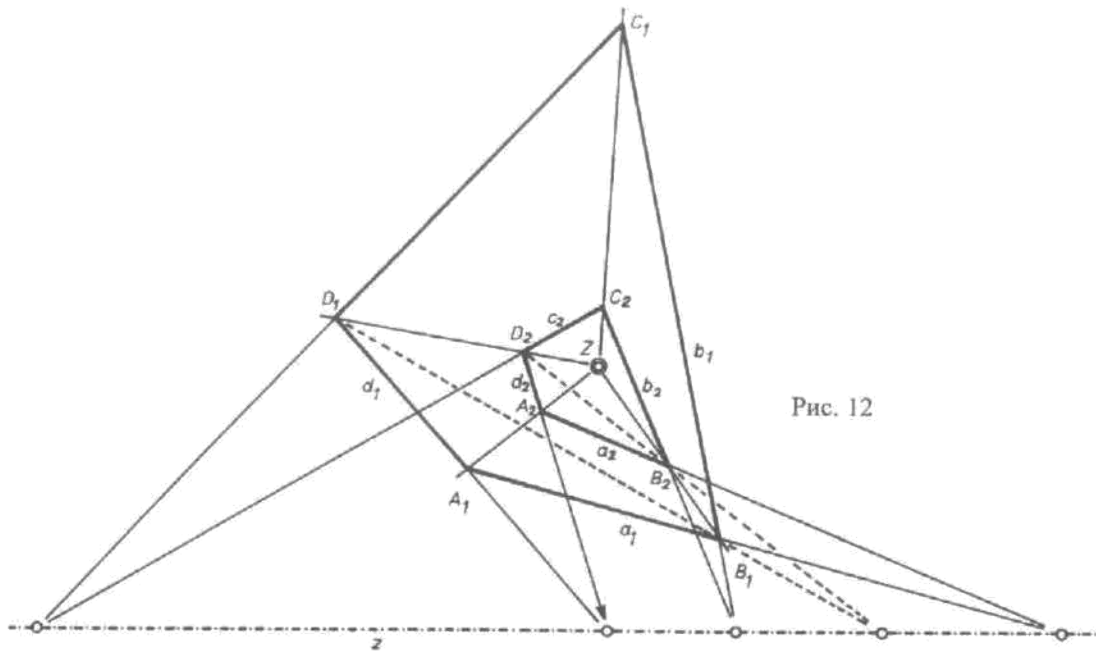


Рис. 12

Плоскостная конфигурация Дезарга является основным строительным материалом перспективных коллинеаций. На рис. 12 представлено перспективное преобразование четырехугольника, в котором A_1 играет роль инициатора, затем строятся a_2, b_2, c_2 и, наконец, d_2 . Почему диагонали D_1B_1 и D_2B_2 пересекаются на оси? Рассмотрим треугольники $B_1C_1D_1$ и $B_2C_2D_2$: они центрированы, а значит, и линированы. Пары сторон (b_1, b_2) и (c_1, c_2) пересекаются на оси, значит, также обстоит дело и с третьей парой, с диагоналями. Почему последняя построенная нами прямая d_2 проходит через неподвижную точку прямой d_1 ? Рассмотрим треугольники $B_1D_1A_1$ и $B_2D_2A_2$: они центрированы, а значит, и линированы. Две пары сторон, (a_1, a_2) и диагонали, пересекаются на оси, следовательно, на оси пересекается и третья пара сторон (d_1, d_2) . Все замыкается, поскольку перспективный чертеж целиком состоит из конфигураций Дезарга!

Задание: Нарисуй две прямые, точка пересечения которых находится за границами листа, и точку P . Построй прямую, соединяющую точку P с недоступной точкой пересечения, превратив ее в центр конфигурации Дезарга!

18. Полный четырехугольник и полный четырехсторонник — гармоническая элементарная фигура

В главе 16 мы поставили вопрос: можно ли при «прыгающем» отображении так подобрать шаг A_1A_2 , чтобы следующий шаг A_2A_3 возвратил нас в A_1 ? Мы обнаружили, что A_3 попадает точно в точку A_1 , когда A_2 делит отрезок ZF внешне в том же отношении, в котором A_1 делит его внутренне. Двойное отношение (ZF, A_1A_2) равно в этом случае -1 , и мы говорим тогда, что пары точек образуют гармоническую четверку.

На рис. 1 и 2 главы 16 мы задавали Z, A_1, A_2 и S_1 и затем строили z как соединительную прямую S_1 и S_2 . Прыжок A_2A_3 возвращал нас в A_1 : ZF, A_1A_2 превращались в гармоническую четверку. Однако при таком построении мы не использовали симметричный прыжок на \bar{z} .

В настоящей главе мы покажем, что гармоническое положение четырех точек действительно не зависит от симметричного прыжка на \bar{z} .

Фигура, изображенная на рис. 1 и 2 главы 16, приводит нас к так называемому *полному четырехугольнику* (рис. 1). Выберем на плоскости четыре точки в общем положении (никакие три из них не лежат на одной прямой). Такие четыре точки называются *первичными или основными вершинами* G_1, G_2, G_3, G_4 . Построим все соединительные прямые между этими четырьмя точками; как бы мы ни выбирали первичные вершины, таких соединительных прямых всегда будет шесть; мы назовем их *сторонами*. Стороны попарно пересекаются в так называемых *промежуточных вершинах*¹¹; таких вершин три. Три промежуточные вершины можно соединить тремя *промежуточными сторонами*¹². Получившаяся фигура называется *полным четырехугольником*. Она состоит из:

- 4 первичных (или основных) вершин: G_1, G_2, G_3, G_4
- 6 сторон
- 3 промежуточных вершин: P, Q, R
- 3 промежуточных сторон: p, q, r

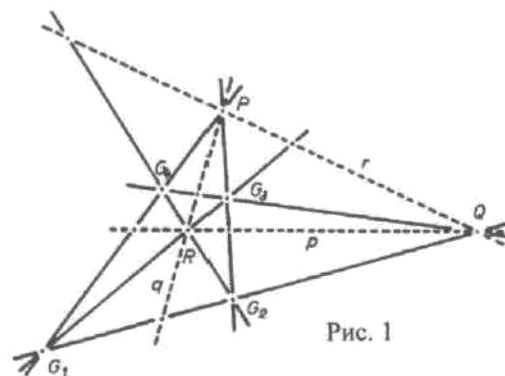


Рис. 1

Промежуточные вершины и промежуточные стороны мы назовем *промежуточным треугольником*. 6 сторон явно поделены на 3 пары; каждая пара пересекается в промежуточной вершине. Стороны каждой пары называются *противоположными сторонами*. При построении полного четырехугольника мы по очереди соединяем и пересекаем. Необходимо долго упражняться в его построении, доведя свой навык до такой степени совершенства, чтобы фигура сразу же узнавалась на рисунке, где она, возможно, переплетена со многими другими.

Всюду, где бы ни возникал полный четырехугольник, он создает *гармоническое положение*. Имеется в виду следующее: на каждой промежуточной стороне лежат две промежуточные вершины и две точки пересечения с третьей парой противоположных сторон. Эти четыре точки промежуточной стороны всегда располагаются гармонически, независимо от положения четырех основных вершин. Две точки пересечения называются поэтому *точками гармонического деления*.

Рис. 1 и 2 главы 16 изображают практически полные четырехугольники. A_1, A_2, B_1, B_2 являются основными вершинами; S_1, S_2 и Z — промежуточными; не хватает только промежуточных сторон ZS_1 и ZS_2 .

Еще раз: *На каждой промежуточной стороне полного четырехугольника промежуточные вершины и точки пересечения с третьей парой противоположных сторон образуют гармонические четверки*. Для обоснования этого утверждения мы вначале продемонстрируем с помощью полного четырехугольника конструкцию четвертой гармонической точки (рис. 2). Для данной внешней точки T_a отрезка PQ нужно построить внутреннюю точку T_i . P и Q мы будем считать промежуточными вершинами полного четырехугольника, T_a — точкой пересечения боковой стороны r с одной из сторон третьей пары. Теперь построим полный четырехугольник. Через T_a проведем произвольную прямую s_1 и выберем на ней две точки G_1 и G_2 в качестве основных вершин будущего полного четырехугольника. G_1 и G_2 мы соединим с P и Q ; получим четыре соединительные прямые, которые пересекаются в двух новых

¹¹ В принятой терминологии — *диагональными точками*. — Прим. пер.

¹² В принятой терминологии — *диагоналями*. — Прим. пер.

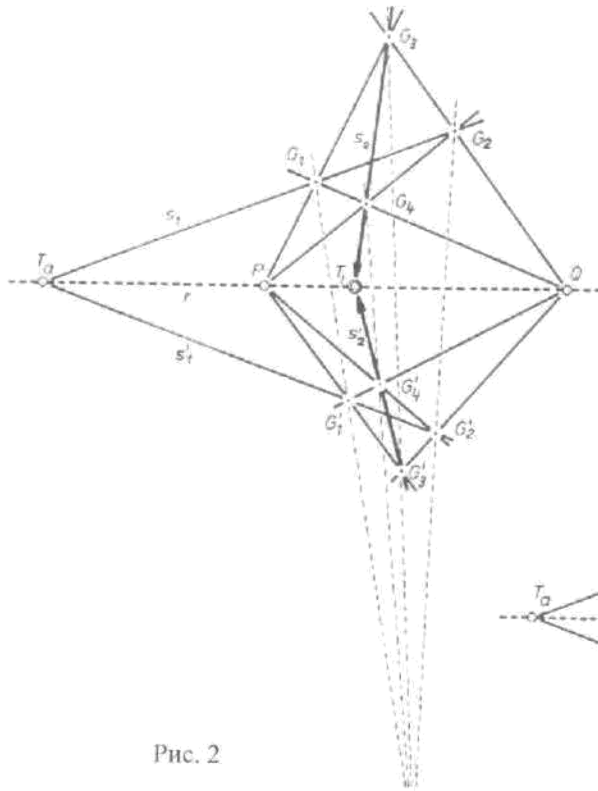


Рис. 2

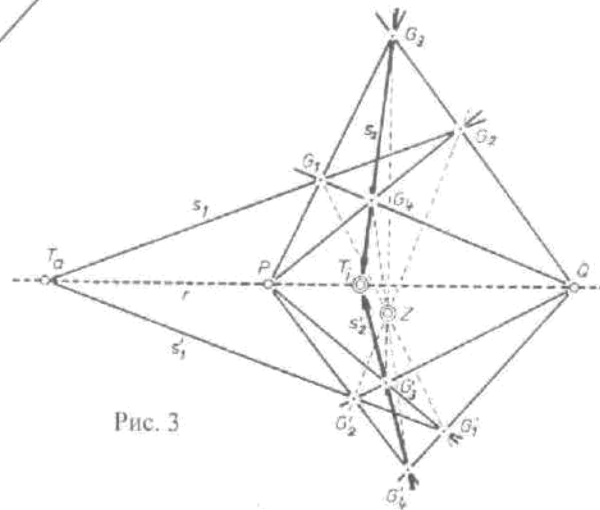


Рис. 3

точках — третьей и четвертой основных вершинах G_3 и G_4 . Соединительная прямая между G_3 и G_4 — это противоположная к стороне s_1 сторона s_2 . Утверждение: точка пересечения T_1 прямой s_2 с r является гармонически сопряженной точкой с T_a относительно P и Q .

Вначале мы покажем, что любой другой построенный таким же образом полный четырехугольник снова приведет к точке T_1 : мы выберем другую прямую s_1' , проходящую через T_a и на ней две произвольные точки G_1' и G_2' . Проведем соединительные прямые с P и Q ; затем соединим новые точки пересечения G_3' и G_4' и получим s_2' . Мы видим, что s_2' действительно проходит через уже построенную точку T_1 . И это при том, что у обоих полных четырехугольников мы произвольным образом выбирали первую прямую и две первые основные вершины! Сколько бы раз мы ни проводили эксперимент, мы все время будем упираться в T_1 . Как же разрешается эта загадка? Как вообще связаны друг с другом четырехугольники? Уже в момент своего возникновения они *линированы* в точках T , P и Q прямой r . Хотя мы не заботились о центре, тем не менее построенные четырехугольники всегда центрированы! Рассмотрим два треугольника $G_1G_2G_3$ и $G_1'G_2'G_3'$; они линированы в точках T_a , P и Q , значит, согласно теореме Дезарга, и центрированы. То есть соединительные прямые соответствующих вершин проходят через центр Z . Затем можно рассмотреть треугольники $G_1G_2G_4$ и $G_1'G_2'G_4'$; они также линированы, а значит, и центрированы. Причем в том же самом центре Z . В качестве третьей пары мы рассмотрим треугольники $G_1G_3G_4$ и $G_1'G_3'G_4'$; они центрированы в Z , а значит, и линированы. Две пары соответствующих сторон пересекаются в точках P и Q на прямой r ; значит, и третья пара — s_2 и s_2' — также должна пересекаться на r . Таким образом, T_1 действительно определяется *однозначно*. Получается, что полные четырехугольники в нашей ситуации всегда центрированы, хотя мы предварительно и не выбирали никакого центра. Особенность построения проявляется в том, что четырехугольники даже *дважды* центрированы (рис. 3: основные вершины второго четырехугольника заново пронумерованы; рассмотрите те же пары треугольников, что и выше).

Чтобы вычислить простые отношения, подберем особый четырехугольник. G_1 и G_2 мы выберем так, чтобы прямые G_1P и G_2Q были параллельны; G_3 тогда окажется в бесконечности (рис. 4):

$$\frac{PT_a}{QT_a} = \frac{m}{n}; \quad \frac{PT_1}{T_1Q} = \frac{PG_3}{G_3G_2} = \frac{m}{n}, \quad \text{значит,} \quad \frac{PT_1}{QT_1} = \frac{m}{n}.$$

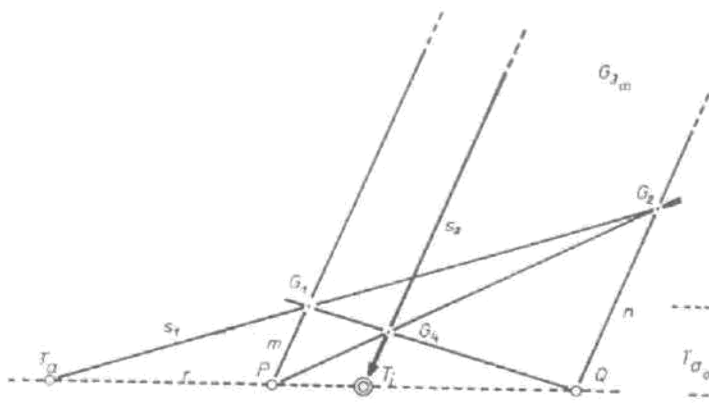


Рис. 4

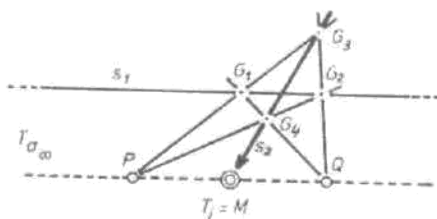


Рис. 5

Таким образом, T_a и T_i делят отрезок PQ внешне и внутренне в равном отношении, т.е. гармонически! На рис. 5 построена середина отрезка PQ как гармонически сопряженная к бесконечно удаленной точке.

Особенность полного четырехугольника состоит в том, что при гармоническом отражении от промежуточной вершины и противоположной промежуточной стороны он переходит в себя. Четверки точек на шести основных сторонах также находятся в гармоническом отношении. Они являются проекциями гармонических четверок с промежуточных сторон.

Теперь мы рассмотрим двойственную конструкцию (*полный четырехсторонник*) (рис. 6). Даны четыре *основные* (или *первичные*) *прямые* g_1, g_2, g_3 и g_4 общего положения (никакие три из них не должны проходить через одну точку). При любом выборе основных прямых, они всегда дадут шесть точек пересечения; мы назовем их *вершинами* полного четырехсторонника. Эти вершины можно *попарно* соединить: появятся еще три *промежуточные стороны*. Эти три промежуточные стороны пересекутся в трех *промежуточных вершинах*. Промежуточные стороны и промежуточные вершины образуют *промежуточный треугольник*. Как и в предыдущем случае, построение необходимо сначала обработать!

Полный четырехсторонник образует пары гармонически сопряженных прямых (рис. 6): если соединить одну из промежуточных вершин (например, R) с третьей парой противоположных вершин, то эти соединительные прямые (изображены пунктиром) и две промежуточные стороны (штриховка) образуют гармоническую четверку. Пунктирные линии называются *линиями гармонического деления*. Можно сразу же увидеть, что указанные пары прямых проецируют на r гармоническую четверку ($PQ, T_a T_i$).

Продемонстрируем, каким образом построить прямую, гармонически сопряженную с t_1 относительно p и q (рис. 7): на t_1 мы выбираем произвольную точку S_1 и через нее проводим две (снова произвольные) прямые g_1 и g_2 , которые пересекаются с прямыми p и q в четырех точках. Эти четыре точки

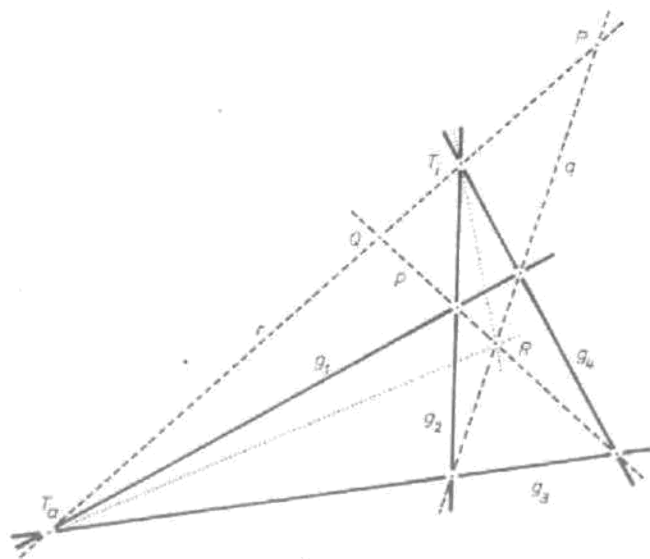


Рис. 6

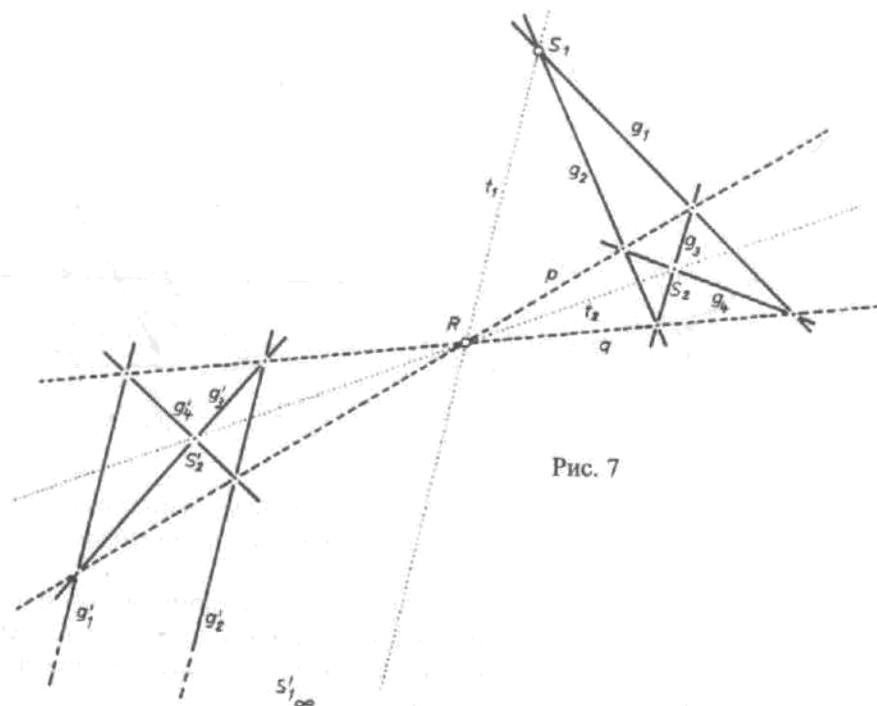


Рис. 7

порождают еще две прямые — g_3 и g_4 . Через их точку пересечения S_2 проходит гармонически сопряженная прямая t_2 . Однозначность этой прямой доказывается соображениями, двойственными нашим рассуждениям об однозначности T_1 . Трехкратное применение теоремы Дезарга показывает, что каждый следующий построенный по указанному рецепту полный четырехсторонник линирован по отношению к самому первому (причем двумя осями). Подробное рассмотрение этого вопроса предоставляется читателю.

Если выбрать точку S'_1 на прямой t_1 бесконечно далеко (рис. 7), то гармоническая сопряженность t_2 окажется особенно ясной (сравни с рис. 5). Можно также отметить, что полный четырехсторонник обладает известным нам фундаментальным свойством полного четырехугольника: при гармоническом отражении с промежуточной стороной в качестве оси и противоположной промежуточной вершиной в качестве центра четырехсторонник отображается сам в себя.

Еще одно открытие мы совершим, если прочертим линии гармонического деления во *всех* промежуточных вершинах — их всего шесть (рис. 8). Если чертеж точен, то они пересекутся по три в четырех точках (I, II, III, IV)! (На рис. 8 основные прямые пронумерованы просто цифрами 1, 2, 3, 4.) Действительно ли шесть линий гармонического деления находятся в особом положении? В чем причина того, что три построенные на рис. 9 линии гармонического деления проходят через одну точку (I)? Рассмотрите два трехсторонника p, q, r и 2, 3, 4; они линированы по прямой 1 (общие точки пересечения соответствующих пар выделены на прямой 1), а значит, по теореме Дезарга, также и центрированы! Три соединительные прямые соответствующих вершин являются точно тремя линиями гармонического деления; значит, они должны проходить через одну точку (I). Снова нам на помощь приходит теорема Дезарга. В данном случае особенность ее применения состоит в том, что промежуточные стороны проходят через вершины другого трехсторонника! Можно отыскать конфигурации Дезарга для центров II, III и IV. Один из трехсторонников всегда является промежуточным.

Четыре центра I, II, III и IV мы называем *конечными точками* полного четырехсторонника; они всегда находятся в общем положении. Если мы рассмотрим их в качестве основных вершин полного четырехугольника, то в конце концов придем к первичным прямым полного четырехсторонника. Стороны полного четырехугольника I, II, III, IV оказываются идентичными шести линиям гармонического деления полного четырехсторонника 1, 2, 3, 4. Вспомогательные вершины совпадают со вспомогательными сторонами, а шесть точек гармонического деления в четырехугольнике — с шестью вершинами четырехсторонника. Точки гармонического деления (в четырехугольнике) лежат по три на четырех прямых (*конечные прямые*), которые, в свою очередь, являются основными прямыми четырехсторонника. Теперь построение замкнулось!

Рисунок, на котором переплелись полный четырехугольник, полный четырехсторонник и общий вспомогательный треугольник, мы назовем *основной гармонической фигурой*. На плоскости она двойственна самой себе, а все входящие в нее четверки точек и прямых являются гармоническими.

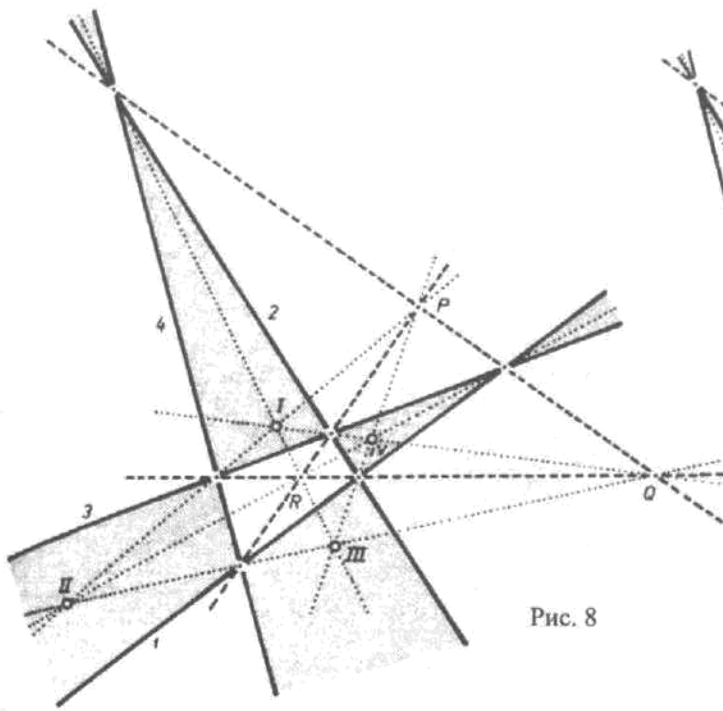


Рис. 8

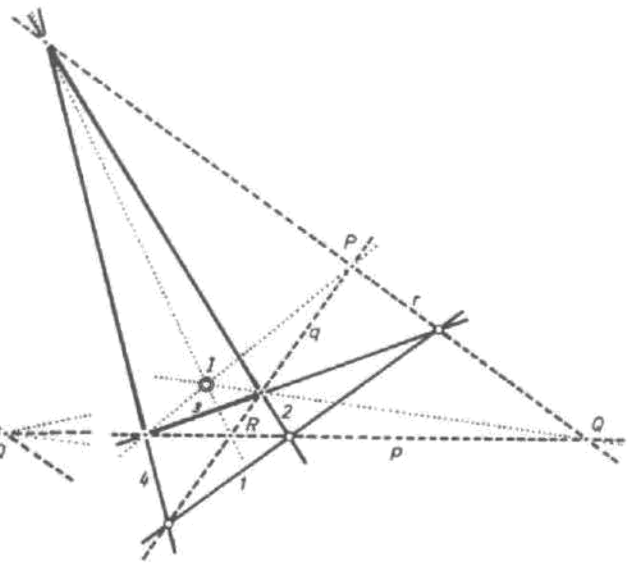


Рис. 9

Эта фигура становится несколько более прозрачной, если заметить (рис. 8), каким образом поле точек разделено четырьмя прямыми 1, 2, 3, 4 на области: промежуточные стороны оказываются диагоналями в трех четырехсторонних областях, промежуточные вершины — их перспективные середины¹³. Шесть линий гармонического деления суть шесть перспективных медиан¹⁴ в четырех трехсторонних областях, и конечные точки — их перспективные центры тяжести.

Задание: С помощью теоремы Дезарга покажи, что каждые три точки гармонического деления полного четырехугольника лежат на одной оси! (*Указание:* Дуализируй рис. 9)

¹³ То есть сопряженные с бесконечно удаленной точкой относительно концов соответствующего отрезка. — Прим. пер.

¹⁴ То есть сопряженные с бесконечно удаленной прямой относительно соответствующей пары прямых (в данном случае — граничных линий соответствующей трехсторонней области). — Прим. пер.

19. «Шаговая мера» — шкалы с одной точкой концентрации

После того как мы познакомились с полным четырехугольником и полным четырехсторонником, давайте рассмотрим шкалы, возникающие при особенной гомологии (элации) (рис. 1, центр Z находится на оси z).

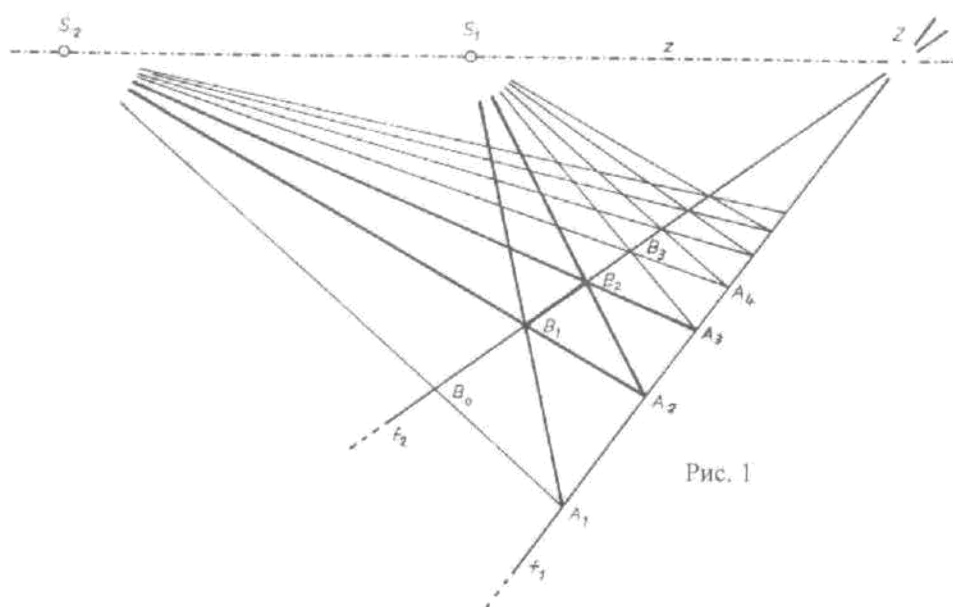


Рис. 1

Построение шкалы происходит точно так же, как и при всех прочих коллинеациях: первоначальный (эталонный) шаг проектируется из точки S_1 на B_1B_2 , затем из точки S_2 снова на A_2A_3 и так далее. Шаги концентрируются около точки Z и становятся все короче в обычном смысле этого слова. Z оказывается на данной шкале единственной точкой концентрации, поскольку F с ней сливается.

Рисунок можно рассматривать как перспективное изображение железнодорожного полотна, проложенного по совершенно плоской равнине прямо по направлению к горизонту z . Z тогда оказывается точкой схода «рельсов», а S_2 — точкой схода «шпал». Сходимость в одной точке S_1 диагоналей A_1B_1 гарантирует одинаковое (и правильно переданное на перспективном изображении) расстояние между шпалами.

Каждая точка на шкале должна по идее быть «серединой» между своими соседями. В каком смысле? Рассмотрим полный четырехугольник с основными вершинами S_1, S_2, B_1, B_2 . A_2 и Z являются в нем промежуточными вершинами, A_1 и A_3 — точками гармонического деления. A_1, A_2, A_3 и Z образуют гармоническую четверку. Для тройки точек A_2, A_3, A_4 аналогичное утверждение доказывается с помощью полного четырехугольника S_1, S_2, B_2, B_3 . Вывод: каждая точка на шкале является гармонически сопряженной с Z относительно своих соседей; в этом смысле ее и можно называть «серединой».

То обстоятельство, что все шаги на шкале имеют одну и ту же длину, становится особенно ясным, когда ось z превращается в бесконечно удаленную прямую плоскости (рис. 2). Тогда шаги оказываются равными в обычном смысле этого слова; правда, «шпалы» не обязательно располагаются при этом под прямым углом к «рельсам». Возникающая в данном случае мера, названная Георгом Адамсом «шаговой мерой», является граничным случаем гиперболической меры. Она характеризуется совпадением обеих точек концентрации. Случай, прекрасно известный нам по обычной жизни.

На рис. 3 шкала продолжена в другую сторону. Пусть A_0 — бесконечно удаленная точка прямой f_1 , A_1A_0 — эталонный шаг в другом направлении. Следующий шаг — A_0A_1 ведет сверху снова в конечную область, и затем шаги концентрируются вокруг Z , единственной точки концентрации.

Чтобы достичь этой точки, нужно сделать в обоих направлениях бесконечно много перспективно равных шагов. Такого же рода шкалы возникают и на прямых, проходящих через S_1 и S_2 . А что на нашем рисунке функционально играет роль бесконечности? Горизонт $z!$ При этом бесконечно удаленная прямая играет роль простой конечной прямой (на которой располагается точка A). Вообще все дело в том, какую роль играет тот или иной элемент в контексте конкретного чертежа. Эту роль мы можем понять только своим мышлением; наше внутреннее восприятие опирается именно на мышление, а не на чув-

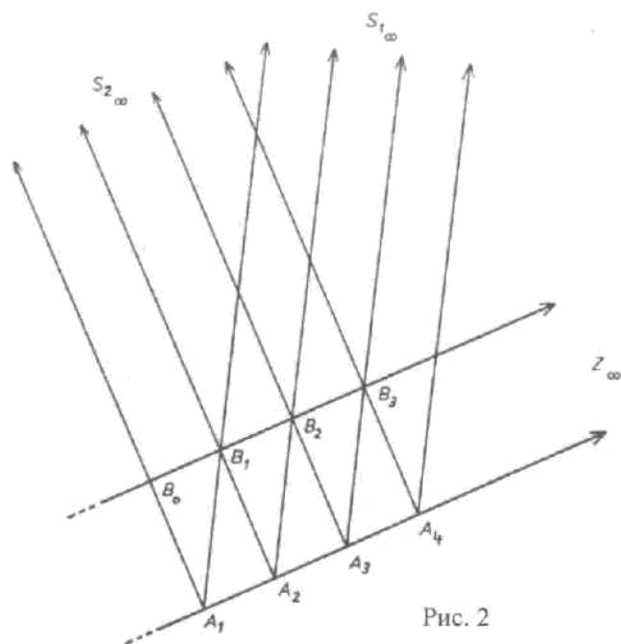


Рис. 2

ственно видимое. Тем самым мы упражняемся в чистом, свободном от чувственного восприятия мышлении.

Что особенного в рис. 2? Функциональная бесконечность совпадает с внешней бесконечностью. А что является определяющим во всех рисунках? Функциональная бесконечность!

Также и на рис. 1 и 2 главы 11 (перспективное изображение «шахматной доски») мы ощущаем горизонт как функционально бесконечно удаленную прямую. Если эта функция совпадает с внешне бесконечно удаленной прямой, то «шахматная доска» представляется нам в виде параллелограмма и все перспективные серединки оказываются обычными серединами отрезков. А в общем случае? В общем случае они остаются гармонически сопряженными с функционально бесконечно удаленным элементом.

Кстати, в точках схода каждая прямая шкалы оказывается в этом же смысле средней для двух соседних!

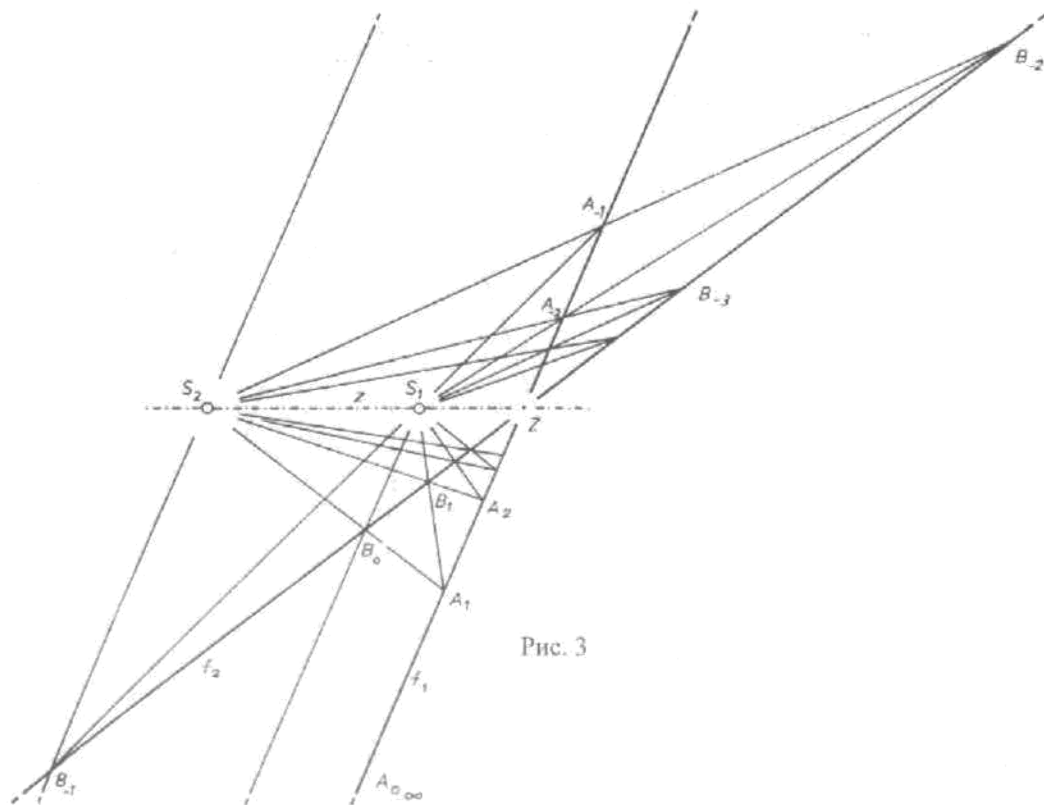


Рис. 3

20. Геометрия связки

Все рассмотрения, проведенные нами на *плоскости*, можно *дуализировать* и перейти к рассмотрению в *связке*. Если на *плоскости* дан *полный четырехугольник* и *полный четырехсторонник*, то в пучке — *полный четырехгранник* и *полный четырехреберник*.

Построим *полный четырехреберник* (рис. 1): в качестве *основных, или первичных, ребер* выберем четыре диагонали куба (a, b, c, d). Изобразим соединительные плоскости между этими четырьмя прямыми — у куба имеется шесть диагональных плоскостей — и назовем их *шестью плоскостными сторонами* четырехреберника. Они подразделяются на три пары противоположащих плоскостей (1, 2 и 3). Каждая пара пересекается по одной из плоскостных осей куба; мы назовем эти прямые *промежуточными ребрами* (e, f, g). Три промежуточных ребра, попарно «соединяясь», дают три *промежуточные плоскости* (4, 5 и 6). Это так называемые *серединные плоскости* куба. Каждая промежуточная плоскость пересекается с соответствующей парой противоположных плоскостных сторон по двум новым прямым; плоскость 4, например, пересекается с плоскостями 1 по реберным осям куба — i . В 6-ой промежуточной плоскости имеются две реберные оси k , на плоскости 5 — две оси g . Эти шесть осей называются *прямыми гармонического деления*; они делят промежуточные плоскости гармонически: например, в промежуточной плоскости 4 находятся промежуточные ребра f и g ; реберные оси i гармонически делят их.

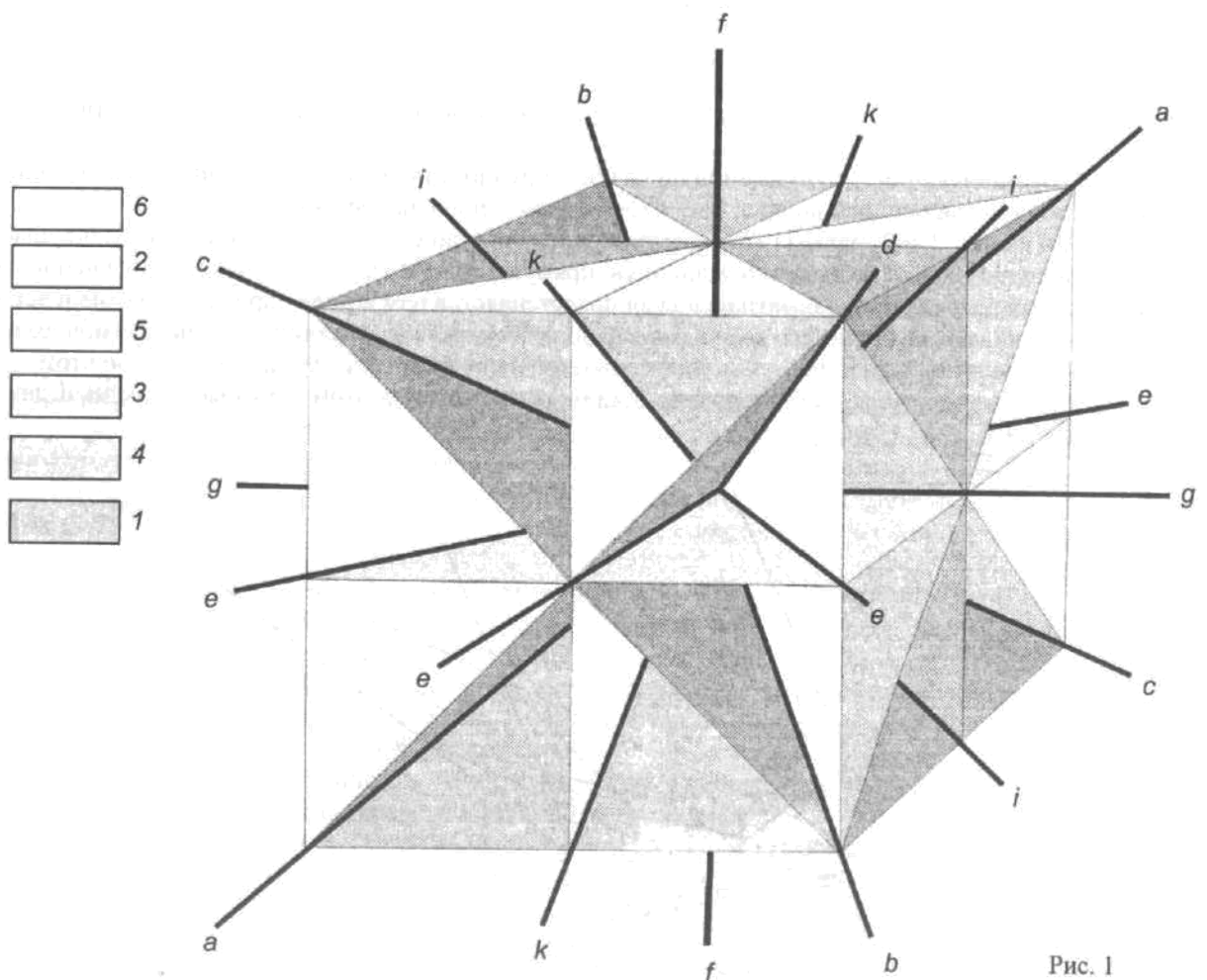
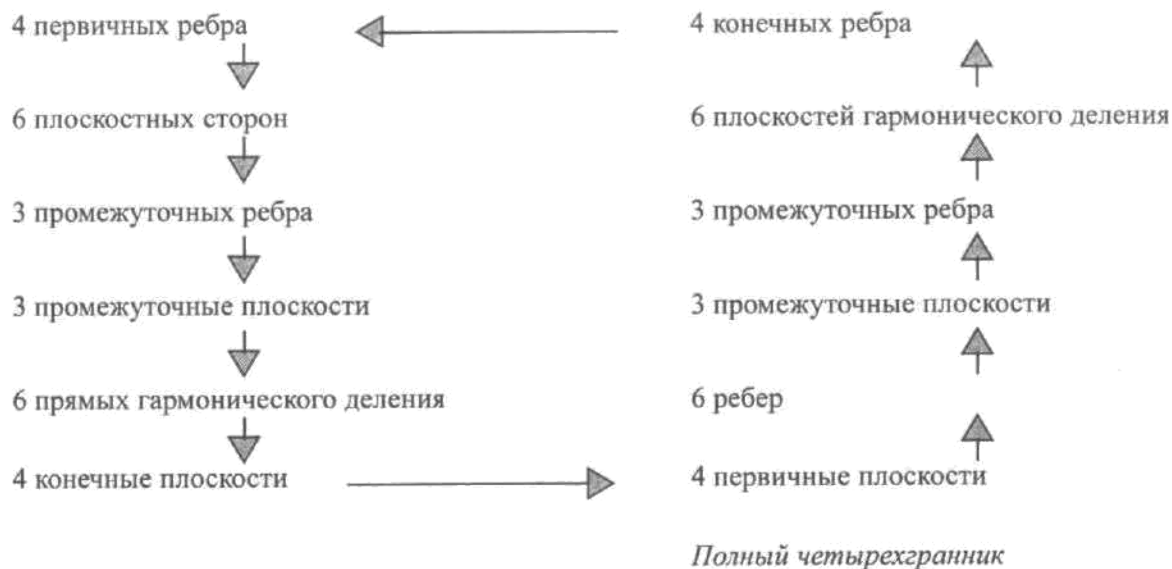


Рис. 1

Прямые гармонического деления объединяются в тройки, лежащие в одной плоскости; всего таких плоскостей четыре (серединно-перпендикулярные плоскости на рис. 4 – 6 главы 2). На рис. 2 они изображены в виде шестиугольников; при этом привычный каркас куба здесь отсутствует. Эти четыре плоскости мы назовем *конечными плоскостями полного четырехреберника*. Если мы примем их за *первичные, или основные, плоскости полного четырехгранника*, то можно проделать в обратном направлении двойственное построение.

Полный четырехреберник



Этот замкнутый круговорот (если угодно, можно взглянуть на него, как на процесс дыхания) называется *основной гармонической фигурой в связке*. Фигура составлена из полного четырехреберника и полного четырехгранника с общим промежуточным трехреберником или трехгранником. Входящие в фигуру четверки прямых и плоскостей являются гармоническими; это вытекает из следующих фундаментальных теорем:

В каждой промежуточной плоскости полного четырехреберника два промежуточных ребра и две прямые, возникающие при пересечении этой плоскости с третьей парой противоположных плоскостей, образуют гармоническую четверку.

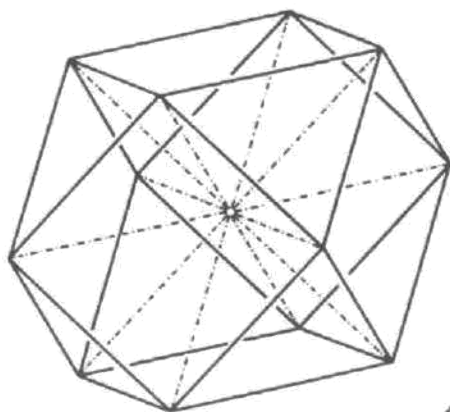


Рис. 2

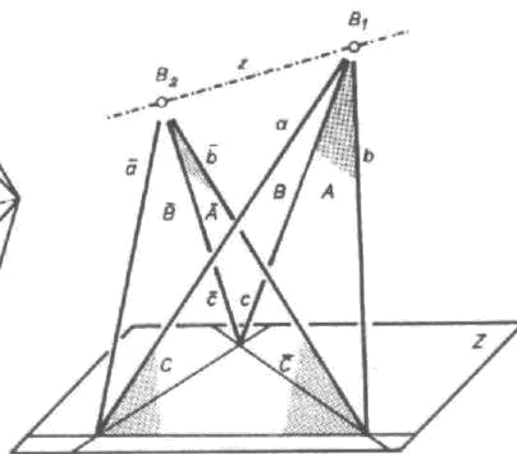


Рис. 3

И: на каждом промежуточном ребре полного четырехгранника две промежуточные плоскости и две плоскости, возникающие при соединении этого ребра с третьей парой противоположных ребер, образуют гармоническую четверку.

Чтобы до конца понять закономерности в строении основной гармонической фигуры, нам потребуется *теорема Дезарга для связки*. Она звучит следующим образом: *Два трехреберника (или трехгранника) одновременно планированы и линированы (или одновременно ни то, ни другое)*. Причем данное утверждение справедливо независимо от того, принадлежат трехреберники одной связке или различным. Если они принадлежат различным связкам, то один из трехгранников (трехреберников) можно

рассматривать как *планарную проекцию* другого (рис. 3). Трехреберник a, b, c (трехгранник A, B, C) в связке B_1 сечется *уровнем* Z , а треугольник, возникающий в сечении, соединяется с центром другой связки — B_2 (в связке B_2 возникает трехреберник $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$). Эти два трехреберника *планированы*: прямые, возникающие как пересечения соответствующих боковых граней, лежат в одной плоскости (на одном плане) Z . Они также *линированы*: соединительные плоскости соответствующих ребер проходят через ось z (прямую, соединяющую B_1 и B_2). Эта фигура в пространстве двойственна центральной проекции треугольника (рис. 7 гл. 17). Она является полным пространственным пятиугольником, состоящим из пяти вершин, десяти плоскостей и десяти прямых. Как и пространственный пятигранник (гл. 17), ее можно интерпретировать десятью различными способами: каждая из десяти плоскостей может взять на себя роль плана (уровня), а каждая из десяти прямых — роль оси.

Теперь представим себе, как план поворачивается от положения Z_1 вокруг прямой g до положения Z_2 (рис. 4). При этом планарно спроектированный трехреберник перемещается из положения $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1$ в положение $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2$. Это преобразование в связке B_2 *планировано* и *линировано*: боковые грани $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ вращаются вокруг неподвижных прямых f_a, f_b, f_c , которые, в свою очередь, сами лежат в одной плоскости (плане), а именно в плоскости, соединяющей B_2 и g . Боковые ребра вращаются в неподвижных плоскостях F_a, F_b, F_c , которые, в свою очередь, линируются по оси $B_1 B_2$. Процесс совершенно двойствен перспективному (центрально-линейному) преобразованию треугольников под действием сгорающей свечи (рис. 1, гл. 12).

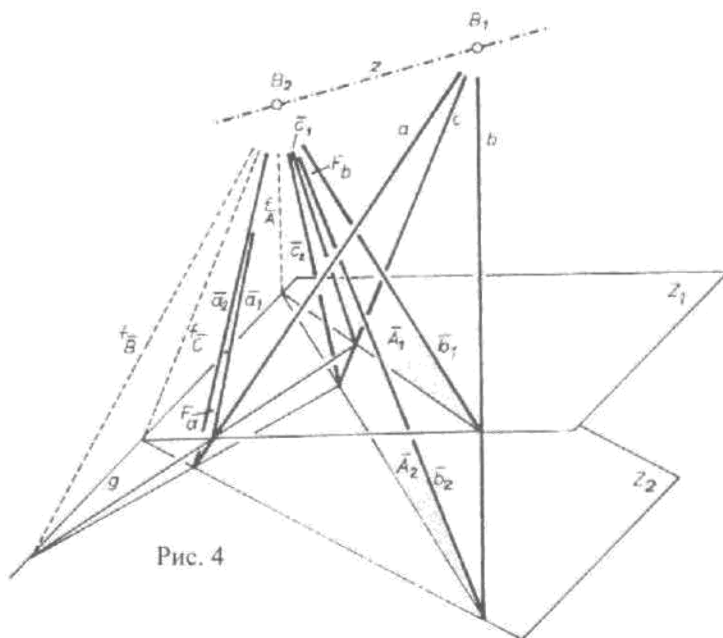


Рис. 4

Все, что было сказано по поводу перспективной коллинеации в плоскости, выдерживает дуализацию. Так, например, в связке возможно гармоническое отражение (гомология) с плоскостью Z и осью z . Или эляция (особенная гомология), когда план и ось инцидентны. Чего в связке на первый взгляд обнаружить не удастся, так это двойственных аналогов гомотетии, осевого аффинного преобразования, сдвига и параллельного переноса; дело в том, что в пучке вроде как нет ни бесконечно удаленной плоскости, ни бесконечно удаленной прямой, которые могли бы взять на себя в данном случае роль оси и плана. О том, как восполнить этот пробел, мы поговорим несколько позже.

В связке можно построить и шкалы, причем как скользящие, так и прыгающие. План и ось для этих шкал снова играют роль *функциональной бесконечности*.

Одно несомненно: нам гораздо труднее представлять себе фигуры и преобразования в связке. Работа в плоскости более наглядна, тогда как, переходя к связке, мы должны призвать на помощь все силы нашего мышления.

Рассмотрим, например, трехреберник на рис. 5, составленный из выделенных диагоналей. Этот трехреберник линирован по штрихованной диагонали с трехреберником, составленным из плоскостных осей, что означает, что соединительные плоскости соответствующих ребер (диагональные плоскости) проходят через отмеченную диагональ. Значит, оба трехреберника также планированы: прямые, возникающие на пересечении соответствующих плоскостей, лежат в одной плоскости (на одном плане). Если

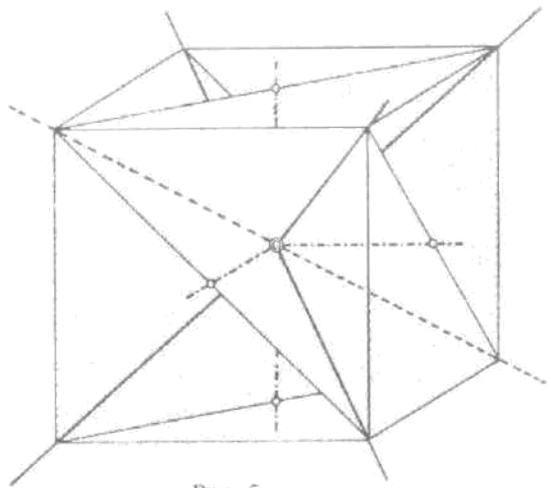


Рис. 5

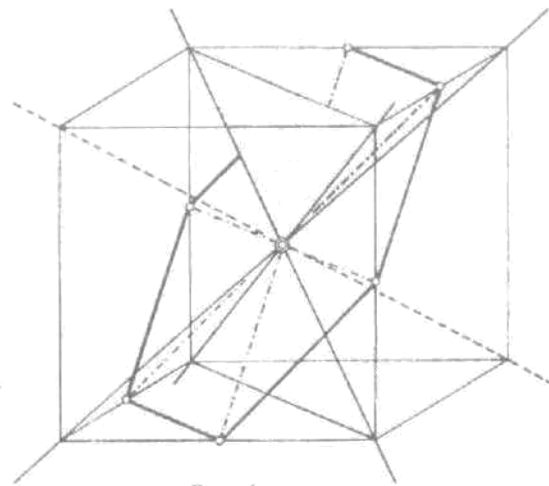


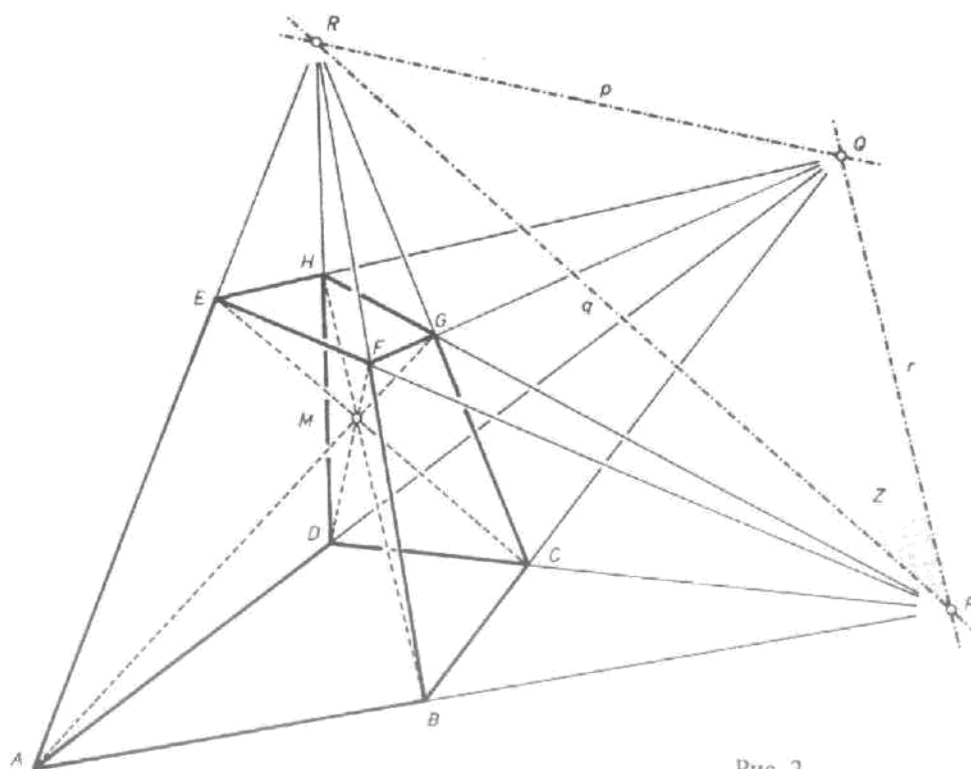
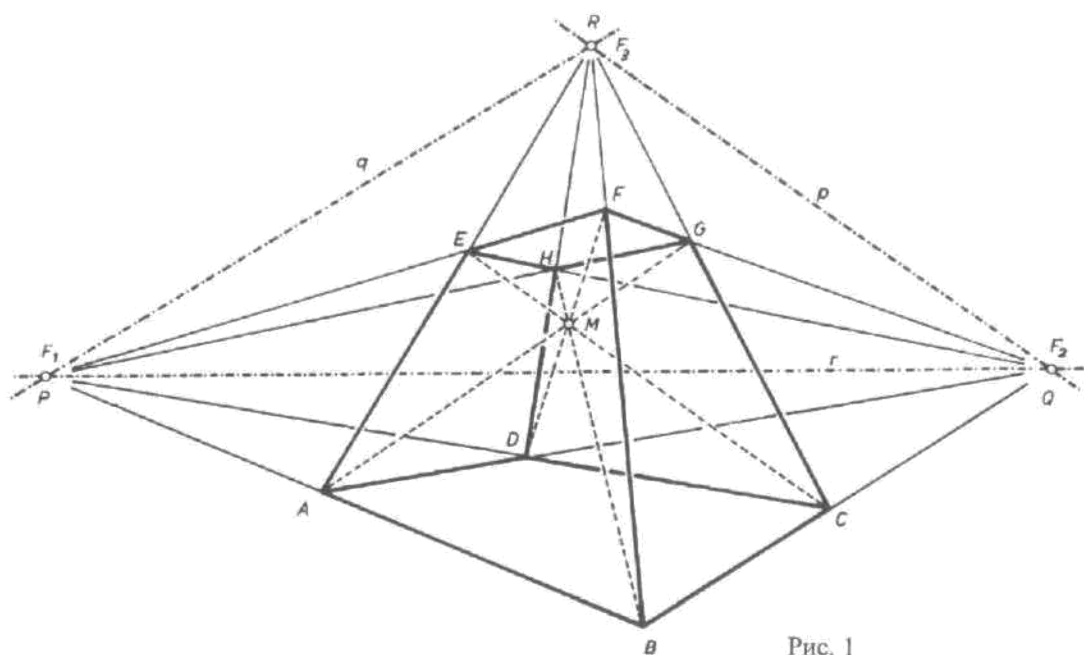
Рис. 6

представить себе эти пересечения (рис. 6), то мы получим 3 штрихпунктирные реберные оси. Они и лежат в одной плоскости (на одном плане). В одной из четырех срединно-перпендикулярных плоскостей. Она, в свою очередь, является одной из четырех конечных плоскостей полного четырехреберника, составленного из диагоналей куба. Существование этих четырех конечных плоскостей гарантировано теоремой Дезарга.

21. Двойственность в пространстве — полный гексаэдр и полный октаэдр — перспективное (центрально-планарное) преобразование

Представленная в последней главе основная гармоническая фигура имела специфическую форму, поскольку мы отталкивались от правильного тела — куба. Можно ли перейти к обобщениям?

Рассмотрим перспективное изображение прямоугольного параллелепипеда (рис. 3 гл. 11). Этот рисунок также допускает обобщение; вертикальные ребра приобретают конечную точку схода в том случае, если плоскость изображения наклонена при центральном проектировании (на рис. 1 — вперед).



Взглянем на рис. 1 уже не как на центральную проекцию параллелепипеда, а как на параллельную проекцию тела, ребра которого сходятся в точках F_1, F_2 и F_3 . Поскольку три упомянутые точки уже не являются точками схода, назовем их P, Q и R . По соединительным прямым p, q, r этих трех точек пересекаются пары плоскостей: плоскость «основания» и плоскость «крыши» — по r , передняя и задняя «стенки» — по q , левая и правая «стенки» — по p . Получившееся тело мы назовем обобщенным гексаэдром. Его изображение зависит от расположения в пространстве и положения плоскости проекции (см. также рис. 2).

Гексаэдр имеет центр M ; диагонали — прямые, соединяющие противоположные вершины — всегда пересекаются в одной точке. Легко понять, почему должны пересечься две произвольные диагонали. Возьмем, например, две диагонали BH и CE . Они лежат в одной плоскости, образованной ребрами BC и EH : следовательно, они пересекаются. Каждая пара диагоналей лежит в своей диагональной плоскости, следовательно, всегда существует точка пересечения. Но если четыре прямые пересекаются попарно, то они либо должны лежать в одной плоскости и образовывать четырехсторонник, либо проходить через одну точку и образовывать четырехреберник. Первая возможность (четырёхсторонник) встретится нам при работе с двойственной конструкцией; в случае же гексаэдра четыре диагонали образуют четырехреберник. Пространственное множество точек — область между ребрами, — в котором находится и центр, мы назовем *ядром* гексаэдра, а совокупность плоскостей вокруг ядра — его *оболочкой*.

Исходя из четырехреберника диагоналей, можно совершенно так же, как в случае с кубом, построить основную гармоническую фигуру:

4 первичные прямые	диагонали
6 плоскостных сторон	диагональные плоскости
3 промежуточных ребра	плоскостные оси
3 промежуточные плоскости	серединные плоскости
6 прямых гармонического деления	реберные оси
4 конечные плоскости	«серединно-перпендикулярные» плоскости

Плоскостные оси проходят через перспективные центры боковых граней, реберные оси — через гармонически сопряженные точки относительно концов ребер для той из точек P, Q и R , которая лежит на продолжении нашего ребра. Прекрасное упражнение: опираясь на чисто внутреннее восприятие, воссоздать в уме эту основную гармоническую фигуру. На рис. 3 изображен промежуточный трехреберник и один из «серединно-перпендикулярных» шестиугольников с тремя своими реберными осями.

Гексаэдр внутренне чрезвычайно подвижен. Сохраняется только трехсторонник p, q, r . Мы назовем этот трехсторонник *определяющим трехсторонником* данного гексаэдра, а плоскость, в которой он располагается, — его *планом Z*: эта плоскость является серединной плоскостью оболочки гексаэдра (рис. 2).

Плоскостные стороны могут произвольно вращаться вокруг прямых p, q и r ; при этом неизменно возникает гексаэдрическое ядро с центром. Это движение плоскостей планировано по плоскости Z ; его *неподвижными прямыми* являются прямые p, q и r .

Движение, кроме того, может быть централизовано: если мы исходим из некоторого определенного гексаэдра (рис. 4), то его центр мы можем выбрать в качестве центра движения. Вершины обязаны двигаться по прямым, проходящим через центр (т.е. по диагоналям). Вершина B может взять на себя роль инициатора движения и перемещаться из положения B_1 в положение B_2 . Все остальные вершины в этом случае движутся также по направлению к центру. Плоскостные стороны гексаэдра вращаются вокруг неподвижных прямых p, q и r , а ребра вращаются в диагональных плоскостях вокруг точек P, Q и R . Преобразование является *центрально-планарным*. Оно совершается в пространстве и соответствует *центрально-линейному* преобразованию в поле и *линейно-планарному* в связке. Прямые *связки прямых* (с центром) M являются неподвижными прямыми при перемещении точек, а прямые *поля прямых Z* — неподвижными прямыми при перемещении плоскостей. Прямые вращаются в пучках.

Когда B доходит до центра M , все ядро сжимается в одну точку. Зато плоскостная оболочка гексаэдра заполняет собой все пространство плоскостей.

Пусть, наоборот, инициатором преобразования является одна из плоскостей, которая вращается вокруг своей неподвижной прямой по направлению к плану Z . Тогда все остальные плоскости также вращаются по направлению к плану. В пределе оболочка гексаэдра стягивается в план, а ядро заполняет собой все пространство точек. Между этими двумя крайними положениями происходят все метаморфозы гексаэдра: когда его ядро уменьшается — растет оболочка, и наоборот.

Если план расположен бесконечно далеко (гексаэдр превращается в параллелепипед), то центрально-планарное преобразование оказывается не чем иным, как пространственной гомотетией.

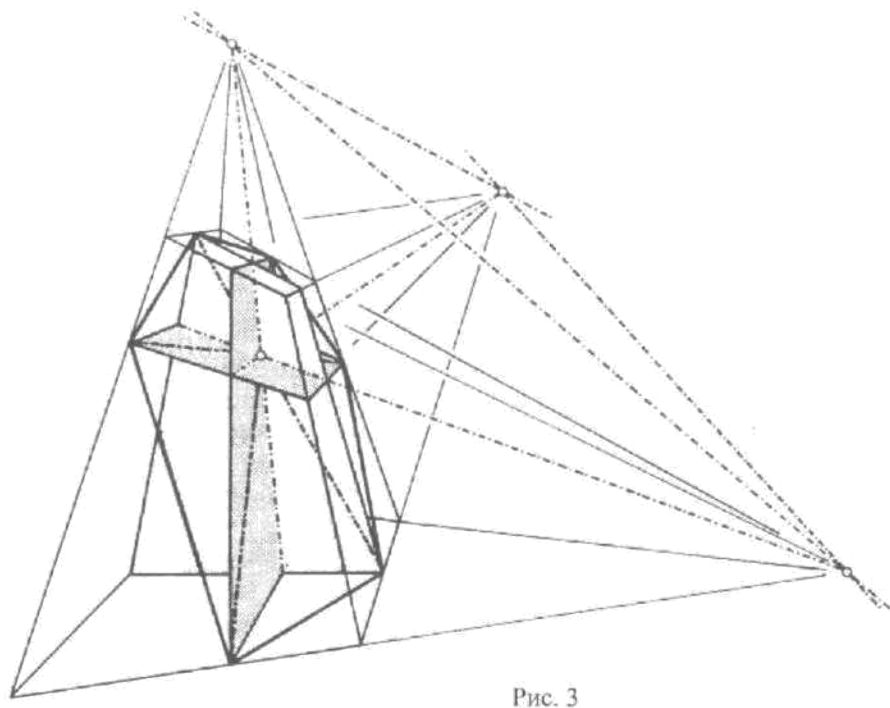


Рис. 3

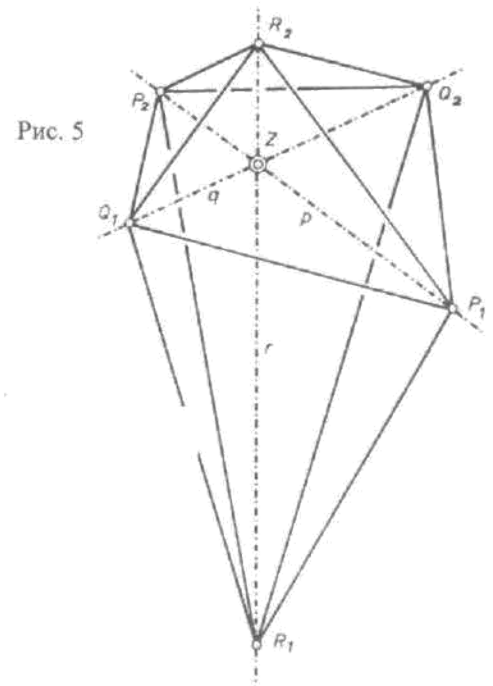


Рис. 5

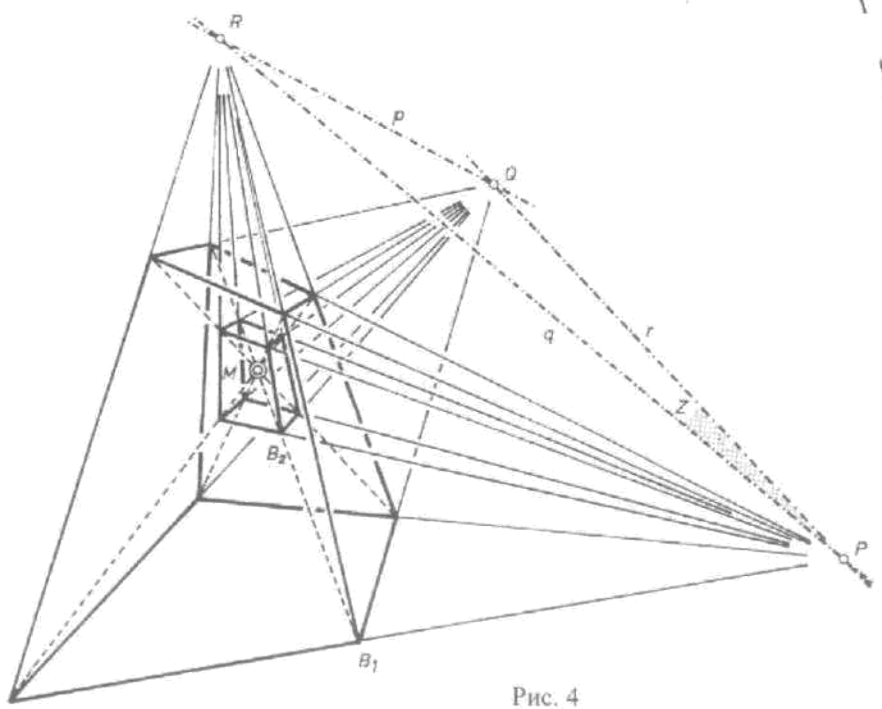


Рис. 4

Двойственное построение, приводящее к возникновению обобщенного *октаэдра*, начинается с *определяющего трехреберника* p, q, r в точке Z (рис. 5). На каждом ребре мы выбираем по паре точек — шесть вершин будущего октаэдра. Тройки вершин определяют плоскость, что дает восемь граней октаэдра.

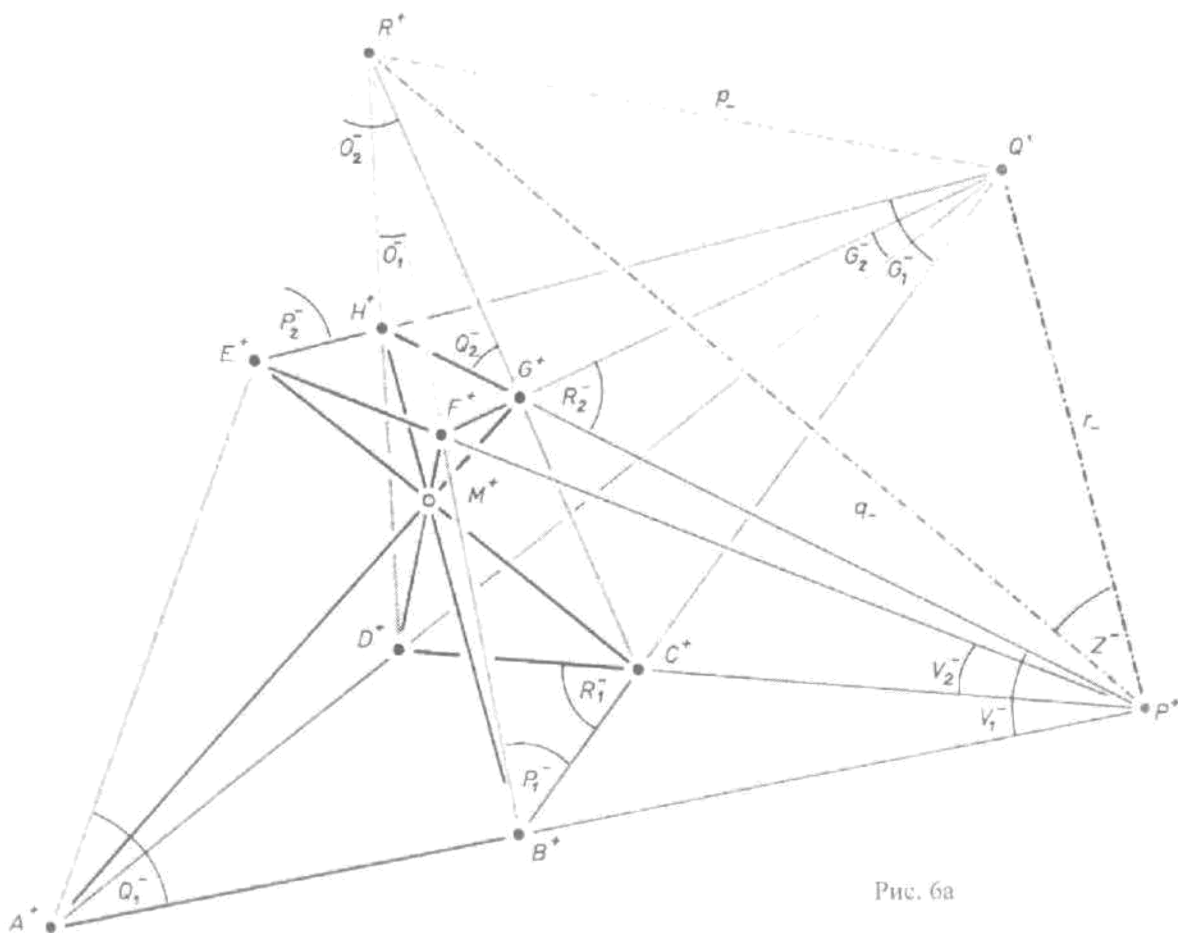


Рис. 6а

Чтобы до конца понять соответствия в строении октаэдра и гексаэдра, назовем, по совету Лунса Лохер-Эриста (см. гл. 5 его работы «Пространство и противополо пространство»), двойственные элементы одинаковыми буквами, причем для точек и плоскостей будем употреблять большие буквы, а для прямых — маленькие. Если большая буква является именем точки, то мы снабдим ее значком «+», если именем плоскости — значком «-». Если прямая соединяет две точки или является носителем точечного ряда, то мы снабдим ее значком «+», в двойственном случае — значком «-».

В гексаэдре (рис. 6а) и в октаэдре (рис. 6б) двойственны следующие элементы:

Определяющий трехсторонник в плане Z со сторонами p, q, r и вершинами P^+, Q^+, R^+ (желто-красно-синий)
 Три пары противоположащих плоскостей $(P_1^-, P_2^-), (Q_1^-, Q_2^-), (R_1^-, R_2^-)$
 Четыре пары противоположных вершин $(A^+, G^-), (B^+, H^-), (C^+, E^-), (D^+, F^-)$
 Три четырехреберника с вершинами P^+, Q^+, R^+ (фиолетовый, зеленый, оранжевый)
 Шесть диагональных плоскостей $V_1^-, V_2^-, G_1^-, G_2^-, O_1^-, O_2^-$ («соединительные» плоскости противоположащих ребер в вышеперечисленных четырехреберниках)

Определяющий трехреберник с центром Z^- с ребрами p_-, q_-, r_- и гранями P^-, Q^-, R^- (желто-красно-синий)
 Три пары противоположащих вершин $(P_1^+, P_2^+), (Q_1^+, Q_2^+), (R_1^+, R_2^+)$
 Четыре пары противоположных граней $(A^-, G^+), (B^-, H^+), (C^-, E^+), (D^-, F^+)$
 Три четырехсторонника в плоскостях P^-, Q^-, R^- (фиолетовый, зеленый, оранжевый)
 Шесть диагональных точек $V_1^+, V_2^+, G_1^+, G_2^+, O_1^+, O_2^+$ (точки пересечения противоположащих сторон в вышеперечисленных четырехсторонниках)

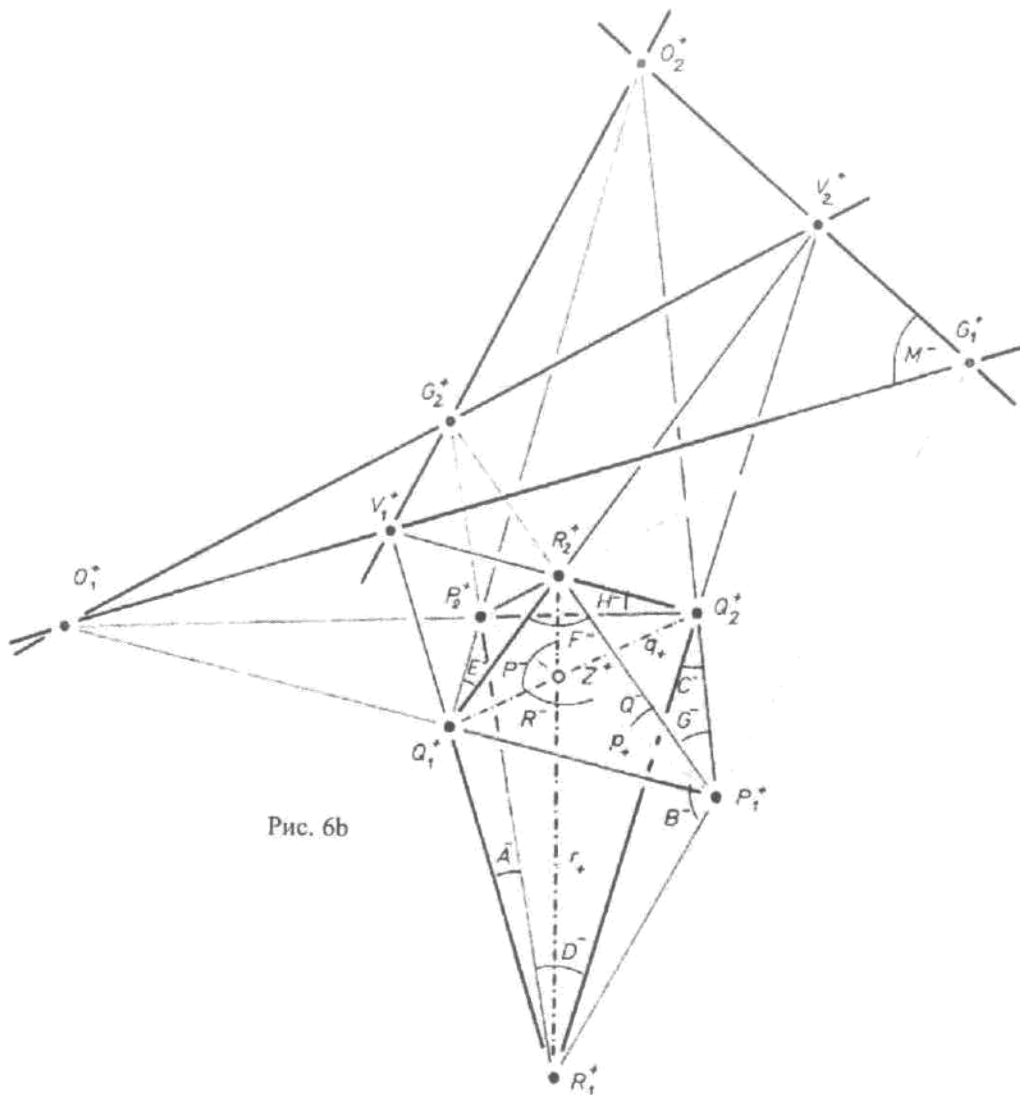


Рис. 6b

Шесть диагональных плоскостей при пересечении дают четыре диагонали гексаэдра (черные) с центром M^*
Такую фигуру мы называем *полным гексаэдром*.

Шесть диагональных точек при соединении дают четыре «диагонали октаэдра» (черные) в срединной плоскости M^*
Такую фигуру мы называем *полным октаэдром*.

У полного октаэдра тройки «диагональных точек» (например, V_1, G_1, O_1) должны лежать на одной прямой («октаэдрической диагонали»), поскольку они являются точками пересечения противоположных ребер противоположных граней (в данном случае граней B^- и H^-). Каждая из четырех диагоналей октаэдра является линией пересечения двух противоположных плоскостей. И каждая пара этих диагоналей пересекается в одной из диагональных точек. Если четыре прямые попарно пересекаются, то они должны или принадлежать одной связке (диагонали гексаэдра), или — как в случае с октаэдром — одному полю, лежащему в срединной плоскости M^* . M^* — срединная плоскость оболочки октаэдра

Четыре диагонали гексаэдра можно взять в качестве первичных прямых (центрированной) гармонической фигуры, которая понятным образом связана с гексаэдром.

В качестве двойственной конструкции выберем четыре диагонали октаэдра. Они станут первичными прямыми плоской гармонической фигуры (в плоскости M^*), естественным образом связанной с октаэдром. Шесть вершин полного четырехсторонника являются диагональными точками октаэдра. Промежуточными прямыми оказываются прямые пересечения плоскости M^* с тремя плоскостями P^+, Q^+ и R^+ определяющего трехреберника. Промежуточные вершины — точки пересечения M^* и трех ребер P^+, Q^+ и R^+ (или R^+ и двум концам этого ребра), так же и для каждого ребра октаэдра существует срединная плоскость (четвертая гармоническая плоскость к P^+, Q^+ или R^+ и двум граням октаэдра, пересекающимся на

этом ребре), причем всего таких плоскостей 12. Пары противоположных плоскостей пересекаются по шести прямым гармонического деления плоской гармонической фигуры (лежащей в M). Они двойственны шести реберным осям гексаэдра. Тройки этих прямых пересекаются по четырем конечным точкам основной гармонической фигуры. Эти четыре точки также связаны с октаэдром. Каждая грань октаэдра представляет собой треугольник, который имеет, естественно, перспективный центр тяжести. Если соединить центры тяжести противоположных граней октаэдра, то мы получим четыре прямые, проходящие через точку Z^+ . Эти четыре прямые пересекают плоскость M в четырех конечных точках основной гармонической фигуры.

Обе двойственные конструкции можно объединить. Если взять шесть центров шести граней гексаэдра и сделать из них шесть вершин $P_1^+, P_2^+, Q_1^+, Q_2^+, R_1^+, R_2^+$ октаэдра (рис. 7), то определяющий трехсторонник гексаэдра и определяющий трехреберник октаэдра объединятся в *тетраэдр*. При этом M^+ и Z^+ (равно как и M^- и Z^-) совпадут. А основные гармонические фигуры в точке M^+ и плоскости M^- относятся друг к другу, как *образующая* и *сечение*.

В нижеследующей таблице элементы, находящиеся в одной строке, двойственны друг другу. Крест-накрест располагаются те элементы, которые в объединенной фигуре *инцидентны*.

Основная центрированная гармоническая фигура с центром M^+ (в гексаэдре)

4 диагонали гексаэдра — первичные прямые

6 диагональных плоскостей

3 промежуточных ребра p_+, q_+, r_+

3 промежуточные грани P^+, Q^+, R^+

6 прямых гармонического деления

4 срединно-перпендикулярные плоскости (конечные плоскости)

Основная плоскостная гармоническая фигура в срединной плоскости M^- (в октаэдре)

4 диагонали октаэдра — первичные прямые

6 диагональных точек

3 промежуточные стороны p_-, q_-, r_-

3 промежуточные вершины P^-, Q^-, R^-

6 прямых гармонического деления

4 «срединно-перпендикулярные» точки (конечные точки)

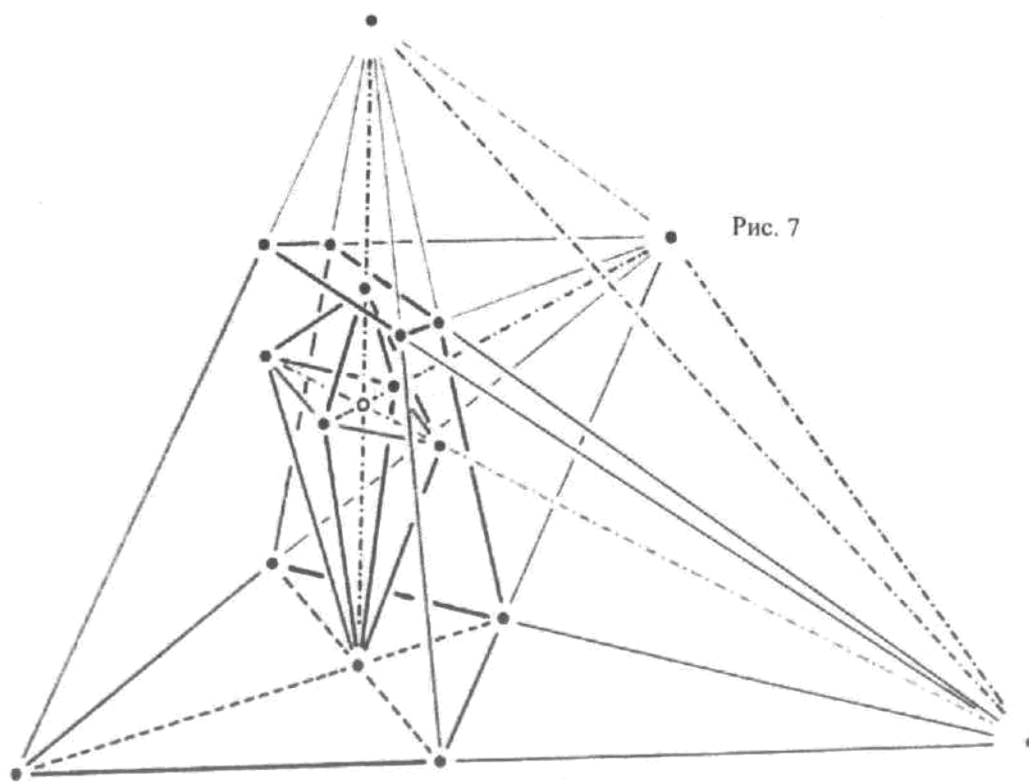
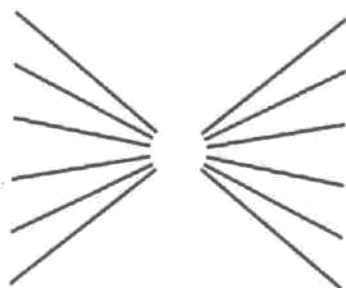


Рис. 7

Разумеется, для того, чтобы увидеть вместе гексаэдр и октаэдр, требуется навык и глубокое знакомство с основными гармоническими фигурами. Однако именно эта структура является наиболее совершенным выражением двойственности и гармонии пространства: каждый элемент здесь имеет себе двойственный, и все четверки плоскостей, точек и прямых являются гармоническими.

Можно, конечно, без конца рисовать объединенную фигуру, но она, ввиду обилия линий, оказывается не вполне внятной. Гораздо естественнее подойти к ней с точки зрения чистого внутреннего восприятия.

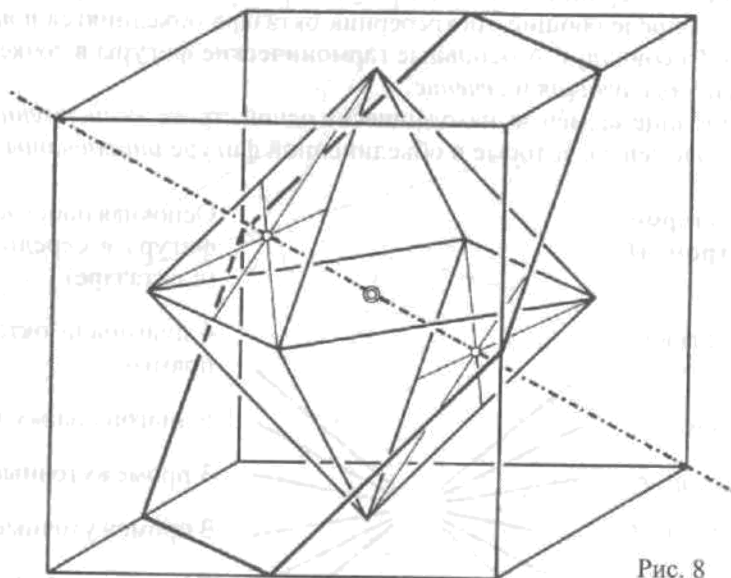


Рис. 8

Видимо, наиболее простой способ состоит в том, чтобы начать с правильных гексаэдра и октаэдра (рис. 8). В этом случае факт инцидентности (взаимной принадлежности) центров тяжести граней октаэдра и диагоналей гексаэдра становится почти очевидным. M и Z превращаются в бесконечно удаленную плоскость, в которой и находится основная плоскостная гармоническая фигура. Она состоит из бесконечно удаленных точек и прямых, доступных, естественно, только внутреннему созерцанию. Можно попытаться мысленно вписать в рис. 8 обе основные гармонические фигуры и увидеть в них сечение и образующую. Серединно-перпендикулярные плоскости гексаэдра параллельны противоположащим граням октаэдра. Таким образом, они инцидентны «диагоналям октаэдра».

Гексаэдр и октаэдр можно расположить таким образом, чтобы их ребра взаимно пересекались (рис. 9). В этом случае на первый план выступают серединные плоскости ребер октаэдра. Они образованы парой взаимно пересекающихся ребер октаэдра и гексаэдра и попарно параллельны диагональным плоскостям гексаэдра. Поэтому они инцидентны прямым гармонического деления (лежащим в бесконечно удаленной плоскости). Реберные оси гексаэдра (штрих-пунктир) расположены перпендикулярно к серединно-перпендикулярным плоскостям октаэдра. Они инцидентны диагональным точкам октаэдра.

Если из полного гексаэдра удалить определяющий трехсторонник (рис. 10) (в двойственной ситуации — определяющий трехреберник из полного октаэдра (рис. 11)), то мы получим (и в двойственном случае также) конфигурацию из 12 равноценных точек и плоскостей и 16 равноценных прямых; через каждую точку проходит четырехреберник, и в каждой плоскости лежит четырехсторонник. Каждая точка может выступить в роли центральной для ядра гексаэдра, а каждая плоскость — в роли серединной для оболочки октаэдра. Такая структура называется конфигурацией Рейе (по имени ее первооткрывателя) или фундаментальной структурой пространства. Она содержит 12 гексаэдров и 12 октаэдров вместе с их ядрами и оболочками. Разумеется, ядра отчасти задевают бесконечность. На рис. 10 легко разглядеть октаэдр, а на рис. 11 — один из гексаэдров (нужно только повернуть рисунок на 90° по часовой стрелке). Поистине, эти рисунки заслуживают многократного повторного размышления (даже медитации)!

Фундаментальное значение данной пространственной структуры проявляется в кристаллографии, прежде всего в центральной роли гексаэдрически-октаэдрической группы.

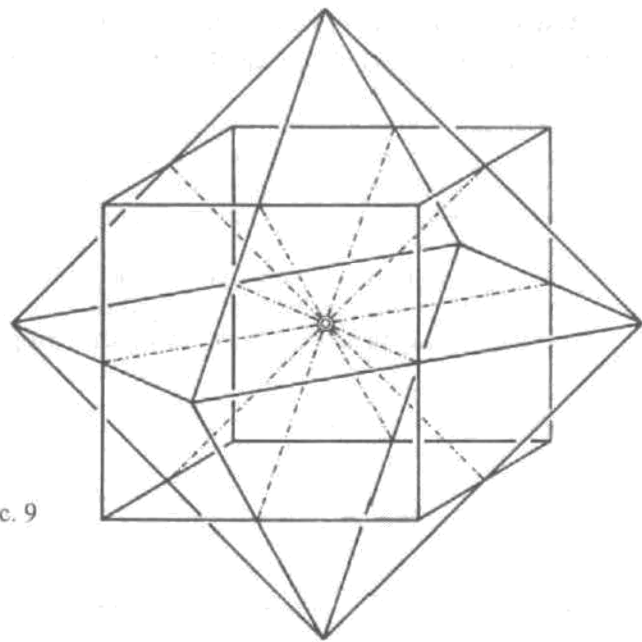


Рис. 9

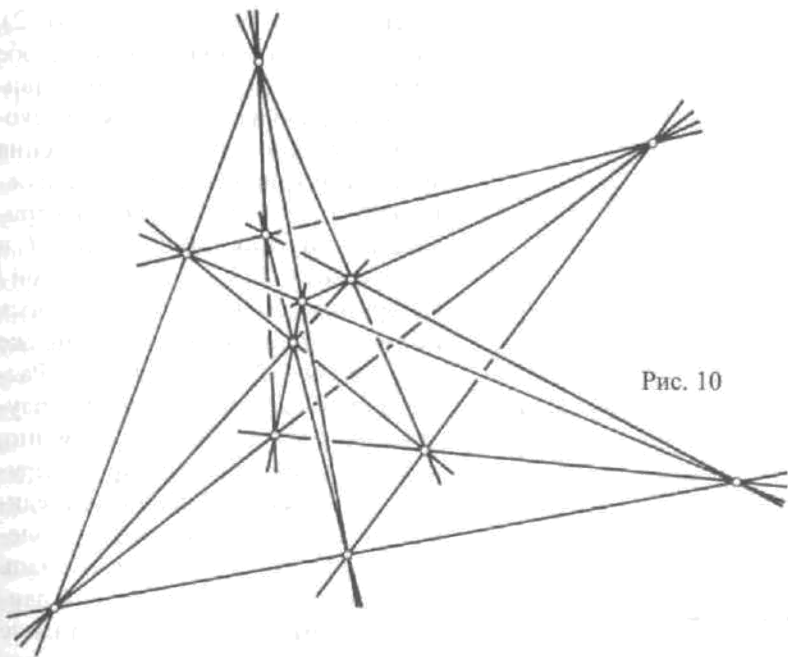


Рис. 10

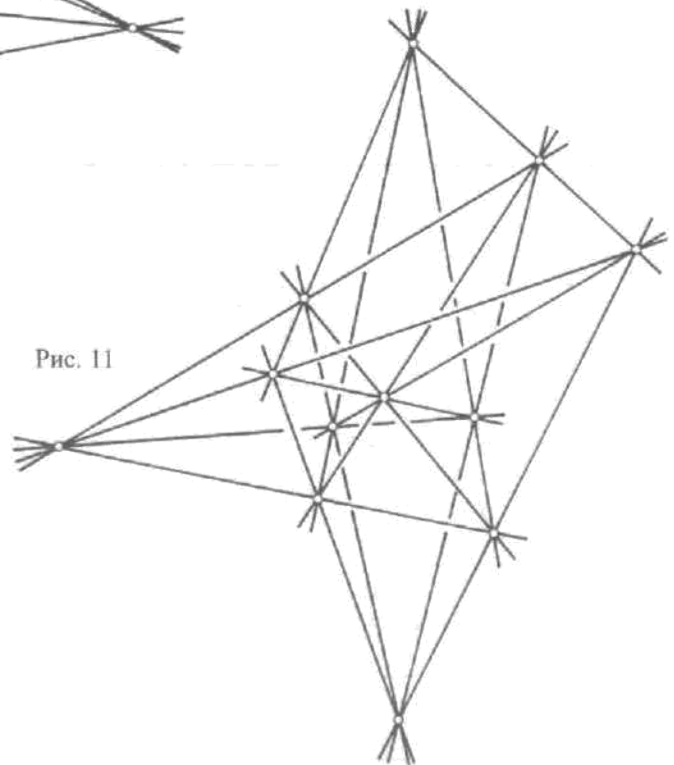


Рис. 11

22. Симметралы — кривые, точки которых равноудалены от определяющих элементов

Предварительное замечание: В этой главе мы снова вернемся к количественным методам и с их помощью познакомимся с важнейшими видами кривых. Полезно сначала узнать их свойства и лишь затем применить к ним аппарат проективной геометрии (гл. 23 и 24). Настоящая глава родилась в результате длительного осмысления работы Эрнста Бинделя «Конические сечения: методы построения и связь с человеком».

Пусть на плоскости заданы прямая l и точка F . Будем называть l и F определяющими элементами. Точки плоскости могут находиться рядом с прямой l , но при этом довольно далеко от точки F , и наоборот (рис. 1). Очевидно, существует и такая точка, которая одинаково удалена от l и F : это середина

Рис. 1

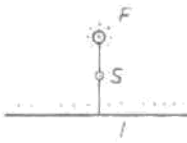


Рис. 2

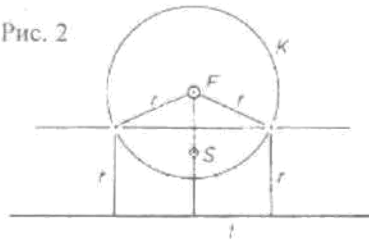


Рис. 3а

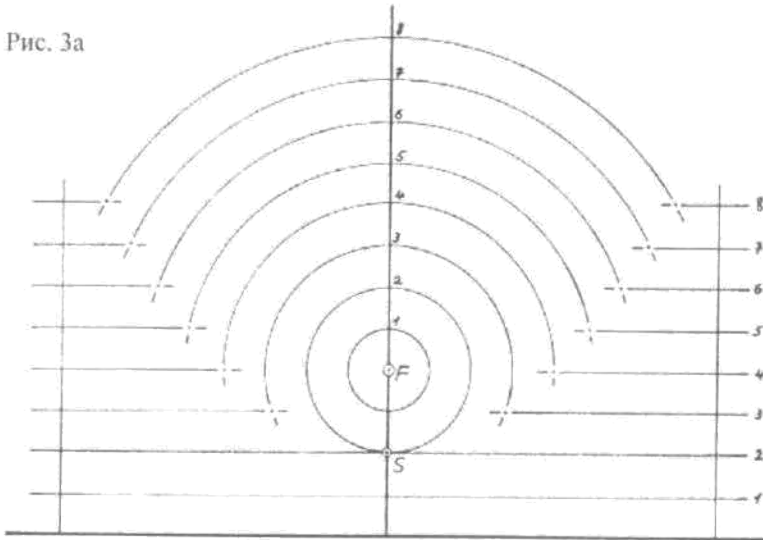
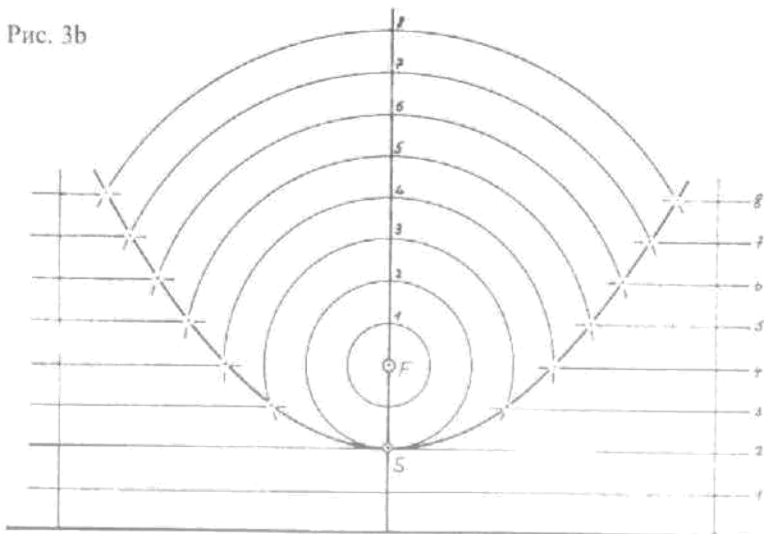


Рис. 3б



перпендикуляра, проведенного из F к l . Есть ли на плоскости еще точки, равноудаленные от l и F ? Да, поскольку каждая окружность с центром F , радиус r которой больше длины отрезка FS , пересекает прямую, параллельную l и проходящую от нее на расстоянии r , в двух точках, которые равноудалены от l и F именно на это расстояние r (рис. 2). Если радиус начинает расти, то обе точки пересечения начинают двигаться вправо и влево вверх по некоторой кривой. Способ построения точек этой кривой следующий: нужно нарисовать семейство концентрических окружностей с центром F и радиусами $1, 2, 3, \dots$, а над прямой l изобразить семейство параллельных прямых (удаленных на такие же расстояния $1, 2, 3, \dots$) (рис. 3а). Рассматривая последовательность получившихся точек, мы, естественно, пытаемся соединить их друг с другом. Мы чувствуем, что такая соединительная линия — кривая — существует. Мы просто ведем карандаш, при этом явно ощущая, если в данный момент мы ошибаемся и наше движение неправильно. Когда кривая идеальна? В том случае, когда каждая ее точка будет равноудалена от точки F и прямой l . Такую кривую мы назовем *симметралю* определяющих элементов F и l . Как мы увидим, в качестве таковых можно выбрать и другую пару. Если все же определяющими элементами, как в нашем случае, являются точка и прямая, то мы будем называть симметраль *параболой*. *Парабола — это геометрическое место всех точек, равноудаленных от некоторой прямой l и некоторой точки F . Точка S называется вершиной параболы, в ней кривая максимально искривлена.* На рис. 3б кривая прочерчена по

лекалу; я, однако, советую читателю рисовать от руки, следуя за построением рис. 3а.

Существует еще один способ построения параболы (рис. 4): на прямой l выбирают последовательность точек $\dots L_0, L_1, L_2, \dots$; далее в этих точках восстанавливают перпендикуляры s к прямой l и затем пересекают их с серединными перпендикулярами $\dots m_{-1}, m_0, m_1, \dots$ отрезков LF . Эти точки пересечения оказываются точками параболы, поскольку серединный перпендикуляр к отрезку LF как раз является геометрическим местом точек, равноудаленных от L и F . (Обратите внимание на то, что серединный перпендикуляр сам является *симметриалью* точек L и F .) Преимущество второй конструкции состоит в том, что она дает не только точки параболы, но и *касательные* к ним (см. примечание к настоящей главе).

Все середины M отрезков касательных LF лежат на касательной t к вершине параболы S . Отсюда — простая конструкция параболы как *огibaющей* (рис. 5): достаточно задать точку F и прямую t , а дальше на ней выбирается последовательность точек $\dots M_{-1}, M_0, M_{+1}, \dots$, они соединяются с точкой F , и строятся перпендикуляры к отрезкам MF . Эти перпендикуляры и должна огибать наша парабола.

Если построить семейство концентрических окружностей с центром F и радиусами $1, 2, 3, \dots$ и затем семейство параллельных (расстояния между соседними прямыми равны 1), то возникает сетка, в которую вписаны два семейства парабол. Параболы, огibaющие точку F на небольшом расстоянии, мы воспринимаем как «узкие». Чем дальше парабола проходит от точки F , тем более открытой, более широкой она нам представляется. Мы склонны говорить о параболах разных форм: это ошибка. Все параболы подобны, более того, все они даже гомотетичны (центр гомотетии — F). Действительно, что получится в результате гомотетии из семейства концентрических окружностей и параллельных прямых? Да точно то же семейство, только с иным шагом! Значит, для перехода от параболы, проходящей вблизи точки F , к более удаленной, достаточно прибегнуть к гомотетии. При этом дуге на «широкой» параболе соответствует уменьшенная дуга на «узкой». Форма же остается неизменной. Итак, *парабола бывает только одной формы, равно как только одной формы бывает и окружность*. Впрочем, мы говорим о том, что окружности меньшего радиуса, искривлены сильнее, а окружности большего — слабее. Но то же можно сказать и о параболах: параболы с меньшим значением параметра (удалением F от l) искривлены в вершине сильнее, чем параболы с большим значением параметра. Заметим, что если мы говорим об одинаковой кривизне во всех точках окружности, то кривизна параболы убывает по мере удаления от вершины. (На рис. 6 l_1, l_2, l_3 являются определяющими прямыми¹⁵ парабол P_1, P_2, P_3 .)

Теперь все рисунки должны будут претерпеть некоторую метаморфозу: определяющая линия l должна перестать быть прямой и закруглиться наверх (превратившись в определяющую окружность l), внутри которой находится точка F . Что при этом станет с параболой? Можно ли и в этом случае говорить о симметриали, т.е. о точках, находящихся «посередине» между определяющей окружностью и точкой F (рис. 7)? Очевидно, точка S_1

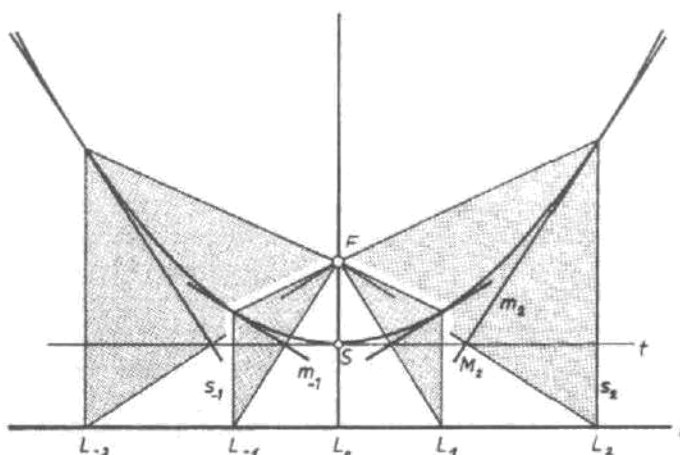


Рис. 4

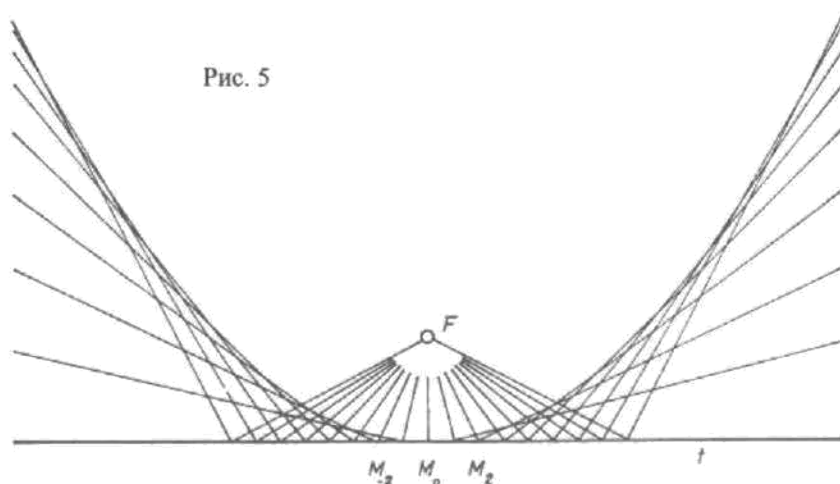


Рис. 5

¹⁵ Директрисами. — Прим. пер.

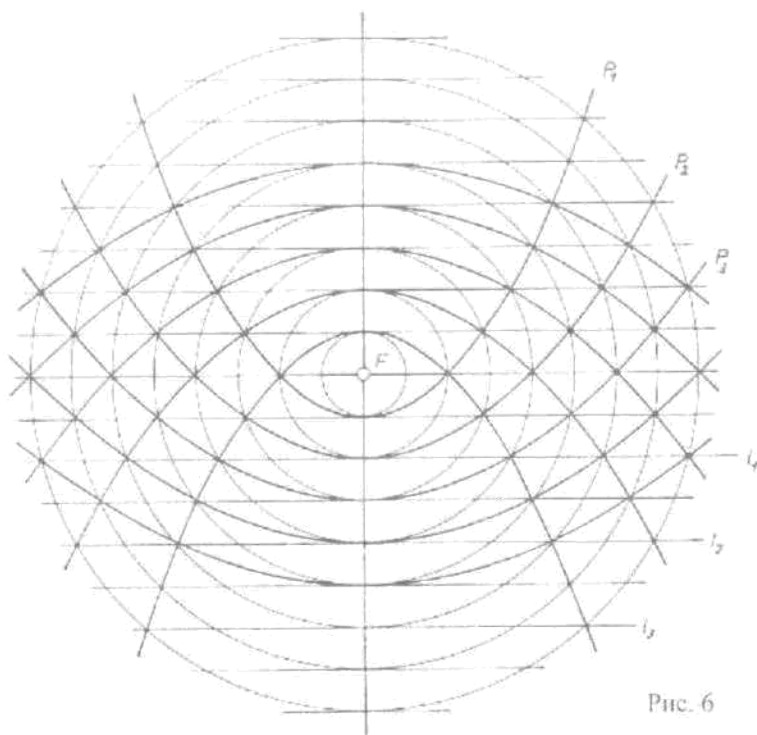


Рис. 6

щается вокруг точки F , а боковая сторона LP — вокруг центра Z . Вершина P описывает симметраль, а срединный перпендикуляр m скользит вдоль нее. Срединна M отрезка FL движется по окружности, проходящей через S_1 и S_2 (гомтетичной определяющей окружности при гомтетии с центром F и коэффициентом $1/2$).

Тот факт, что фигура симметрична относительно вертикальной оси, следует из построения. Труднее объяснить симметричность верхней и нижней частей. Кроме того, на первый взгляд точки Z и F

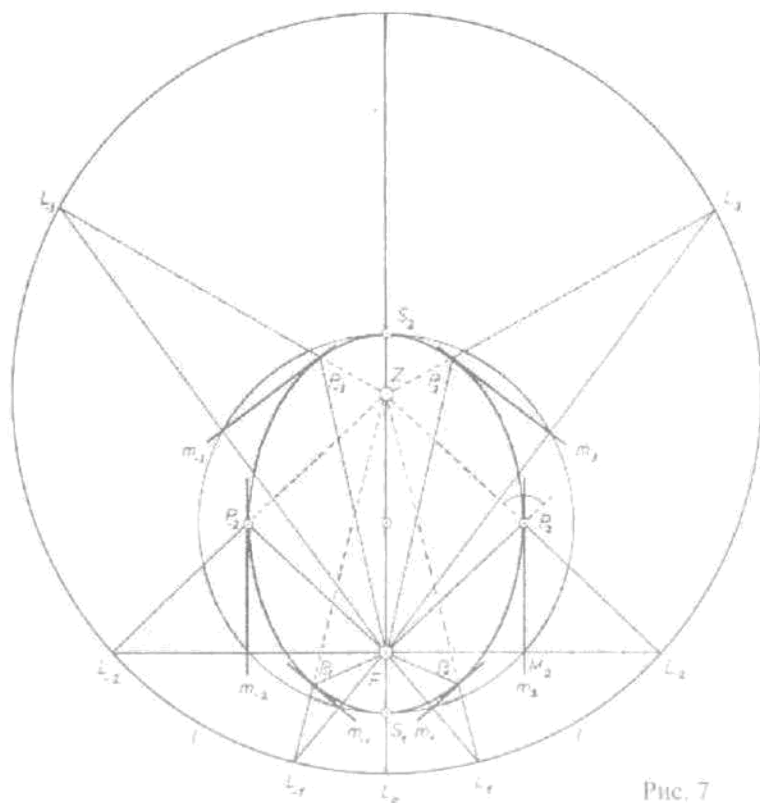


Рис. 7

по-прежнему является серединой. А другие? Давайте попробуем приспособить конструкцию на рис. 4 к нашему случаю. Выберем на этой окружности точки $\dots L_{-1}, L_0, L_1, \dots$; восстановим из них перпендикуляры к окружности (это просто радиусы). Эти радиусы мы пересечем с срединными перпендикулярами m отрезков LF . Точки пересечения P являются искомыми серединами, поскольку они равноудалены от l и F . Теперь соединим построенные точки (нарисуем симметраль) и увидим, что получившаяся кривая замыкается в точке S_2 , равноудаленной от F и самой верхней точки определяющей окружности. Наша кривая огибает срединные перпендикуляры, которые, в свою очередь, являются касательными к ней (см. примечание в конце главы).

Можно представить себе, как движется равнобедренные треугольники FLP (на рисунке — покрыты точечным растром). Основание FL вра-

щается вокруг точки F , а боковая сторона LP — вокруг центра Z . Вершина P описывает симметраль, а срединный перпендикуляр m скользит вдоль нее. Срединна M отрезка FL движется по окружности, проходящей через S_1 и S_2 (гомтетичной определяющей окружности при гомтетии с центром F и коэффициентом $1/2$).

Тот факт, что фигура симметрична относительно вертикальной оси, следует из построения. Труднее объяснить симметричность верхней и нижней частей. Кроме того, на первый взгляд точки Z и F находятся по отношению к нашей кривой в одном и том же положении! Рассмотрим отрезки PF и PZ (PZ нарисованы пунктирной линией). Когда P перемещается по кривой из положения S_1 в положение S_2 , отрезок PF становится все длиннее, а отрезок PZ — все короче. Обратите внимание, у отрезка PF есть равновеликий спутник — отрезок PL . Складывая отрезки PL и PZ , мы всегда (независимо от точки P) получаем радиус определяющей окружности. Следовательно, сумма PF и PZ также дает радиус. При движении точки по симетрале сумма расстояний от нее до F и до центра определяющей окружности Z остается постоянной и равной радиусу определяющей окружности. Кривая с таким свойством (постоянство суммы расстояний до двух заданных точек F и Z) называется эллипсом. Поскольку в таком определении точки F и Z совершенно равнозначны, неудивительно, что кривая симметрична относительно горизонтальной оси. Во-

обще, точки F и Z могут поменяться ролями: F может стать центром второй определяющей окружности с таким же радиусом и так же обнимающей точку Z .

Точки F и Z называют *фокусами* эллипса. Отрезки, соединяющие фокусы с точкой на эллипсе, называют *фокальными радиусами*. Откуда возникли такие обозначения? Представим себе в точке F точечный источник света. Свет от него распространяется во все стороны и отражается от эллипса. Если бы лучи света попадали на *плоское* зеркало, то угол его падения был бы равен углу отражения. В нашем случае нужно представить себе касательную (m) к эллипсу в точке P . Тогда падающий и отраженный луч образуют с этой касательной одинаковые углы. Из равнобедренности треугольников, в которых прямая m играет роль биссектрисы, следует, что отраженный луч должен пройти через точку Z . Это означает, что все лучи света, выходящие из F и отраженные от поверхности эллипса, попадут в точку Z , далее отразятся от эллипса и снова попадут в точку F и так до бесконечности ...

Теперь согнем директрису параболы, но не вверх, а вниз так, чтобы точка F оказалась определяющей окружности. Как выглядит симметраль в таком случае? Снова выберем на окружности последовательность точек ... L_{-1}, L_0, L_1, \dots (рис. 8). Равнобедренные треугольники вращаются вокруг точки F ; вершина L скользит по окружности, а середина M основания движется по окружности K (вполовину меньшей, чем определяющая окружность). Угол при вершине треугольника становится все более острым, тем острее, чем ближе точка L подходит к положению T — точке касания касательной t , проведенной из F к определяющей окружности. Когда L достигает положения T , углы при основании $DFLP$ становятся прямыми, т.е. боковые стороны оказываются параллельными прямой m_1 , и вершина треугольника удаляется в бесконечность. Значит, и симметраль также стремится в бесконечность, к беско-

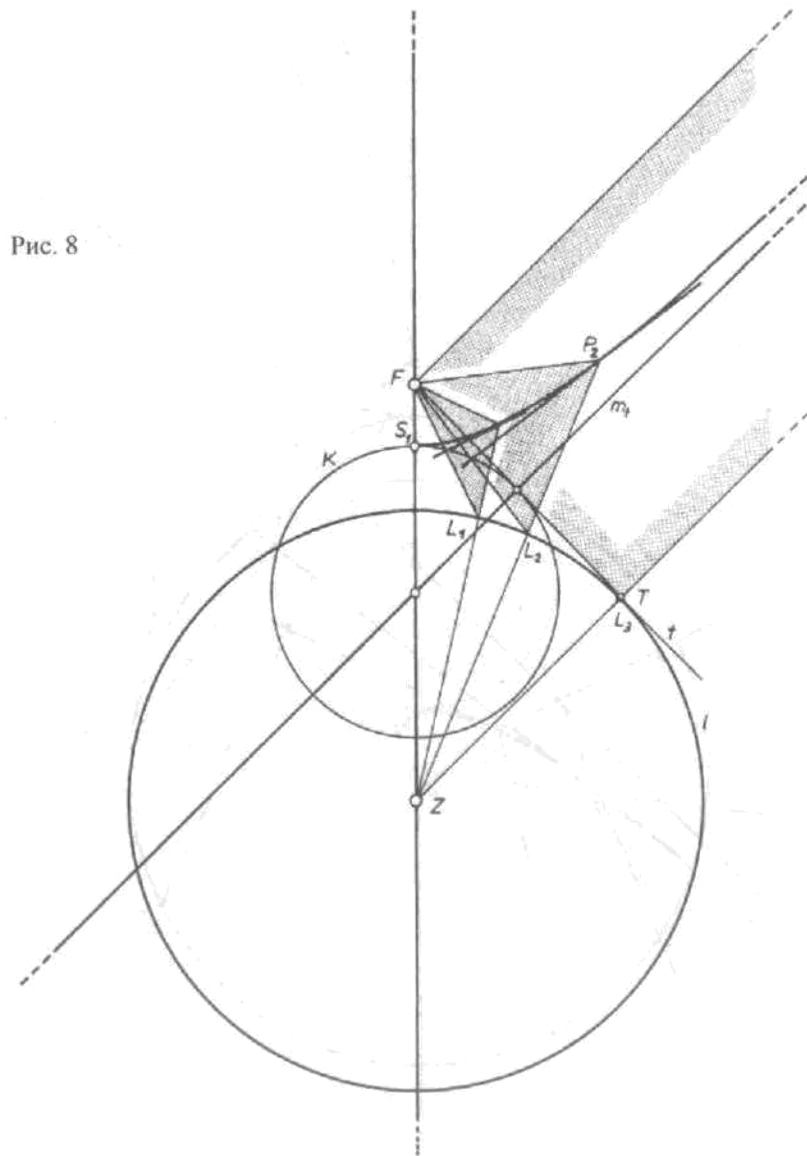


Рис. 8

нечно удаленной точке прямой m_1 . Расстояние между симметриалью и прямой m_1 становится все меньше и меньше, симметриаль прилегает к этой прямой все ближе и ближе, однако касание происходит лишь в бесконечности. Прямая m_1 имеет с симметриалью общую бесконечно удаленную точку, в этой точке m_1 касается симметриали. Такую касательную также называют *асимптотой* кривой. (Асимптота значит «не-касательная», точнее, не-касательная с конечной области.)

Если точка L скользит все дальше по окружности и проскакивает положение T , попадая, например, в положение L_4 , то равнобедренный треугольник «раскрывается» и его «внутренняя» область, проходя через бесконечность, появляется слева и замыкается в точке P_4 . Получается, что симметриаль появляется снизу слева, все более удаляясь от асимптоты, пока не достигает положения S_2 (рис. 9).

Но вот точка L , пройдя самую нижнюю точку определяющей окружности, начинает подниматься с левой стороны. С этого момента на нашем чертеже начинает выстраиваться симметричная фигура (рис. 10). Симметриаль уходит вдоль второй асимптоты направо вниз, переходит через бесконечно удаленную точку, расположенную в направлении асимптоты, и с левой стороны опять приходит к S_1 . Снова симметриаль представляет собой *замкнутую* кривую, правда, дважды проходящую через бесконечность, оба раза следуя за асимптотами.

С «конечной» точки зрения у симметриали две ветви: *верхняя* ветвь обладает тем свойством, что *кратчайшее* расстояние от нее до определяющей окружности равно расстоянию до точки F . *Нижняя* ветвь обладает тем же свойством, только расстояние нужно мерить «через центр». Рис. 10 в особых комментариях не нуждается: в данном случае симметриаль обладает тем свойством, что *разность рас-*

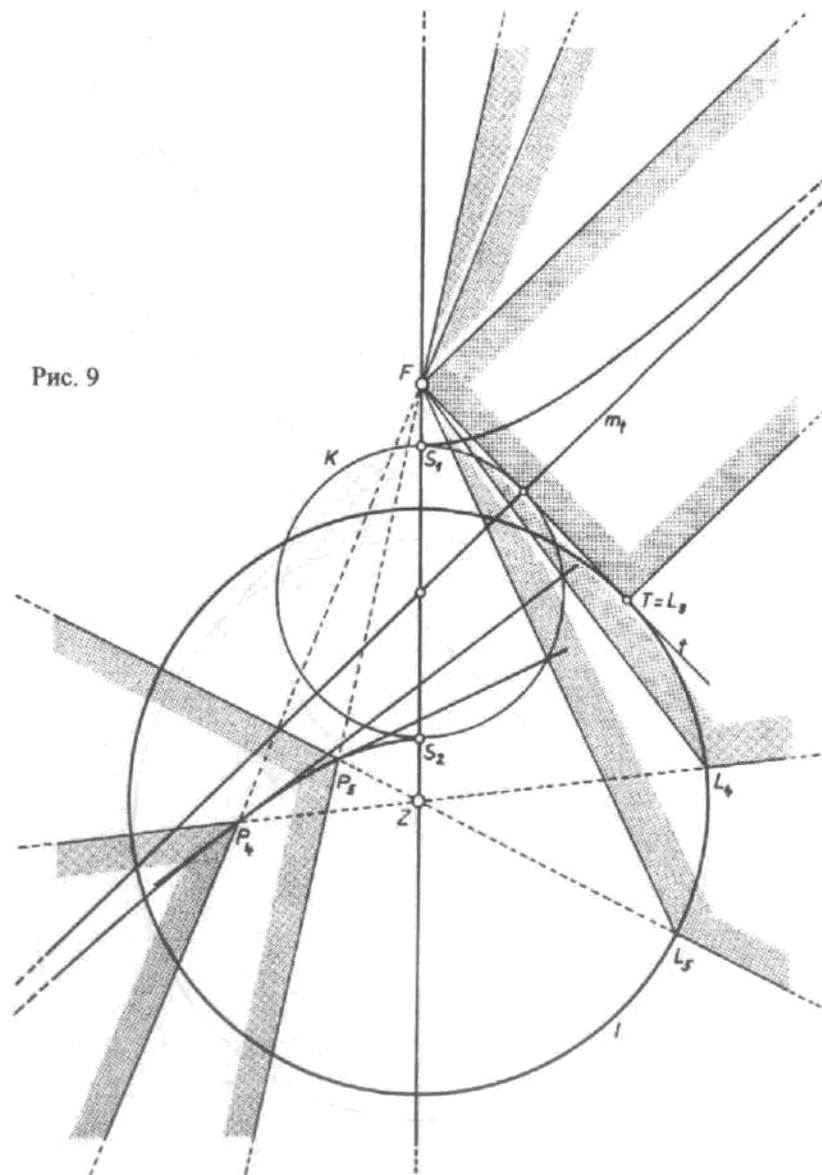


Рис. 9

стояний до фокусов ($PZ - PF$) постоянна и равна радиусу определяющей окружности. Когда точка принадлежит верхней ветви, эта разность положительна, когда нижней — отрицательна.

Такие кривые (разность расстояний до двух фиксированных точек постоянна) называются *гиперболами*. Гипербола обладает одним знакомым нам по эллипсу свойством, а именно: ее касательная также является биссектрисой угла, образованного фокальными радиусами (причем внутреннего угла, в то время как касательная эллипса делит пополам внешний угол). Точки F и Z снова называются фокусами: если поместить в фокус F источник света, то его свет, отразившись от гиперболы, соберется в точке Z (правда, предварительно ему придется пройти сквозь бесконечность). Если смотреть на эту ситуацию с конечной точки зрения, то свет, испускаемый точкой F , так рассеивается гиперболическим зеркалом, как если бы он выходил из точки Z .

На рис. 11 построены два семейства концентрических окружностей. Они задают на плоскости сеть. Правда, границы четырехугольных ячеек не прямолинейные, а искривленные отрезки. Если нарисовать «диагонали» этих четырехугольников, то возникнут эллипсы и гиперболы. Действительно, когда мы движемся по одной из диагоналей, сохраняется сумма фокальных радиусов, а когда движемся по другой — разность. В каждой вершине эллипсы и гиперболы пересекаются под прямыми углами. Действительно, касательная к эллипсу делит пополам между фокальными радиусами внешний угол, а касательная к гиперболе — внутренний. Остается только заметить, что биссектрисы двух смежных углов всегда перпендикулярны. Оба семейства покрывают всю плоскость: через каждую точку плоскости (кроме фокусов) проходит ровно один эллипс и одна гипербола.

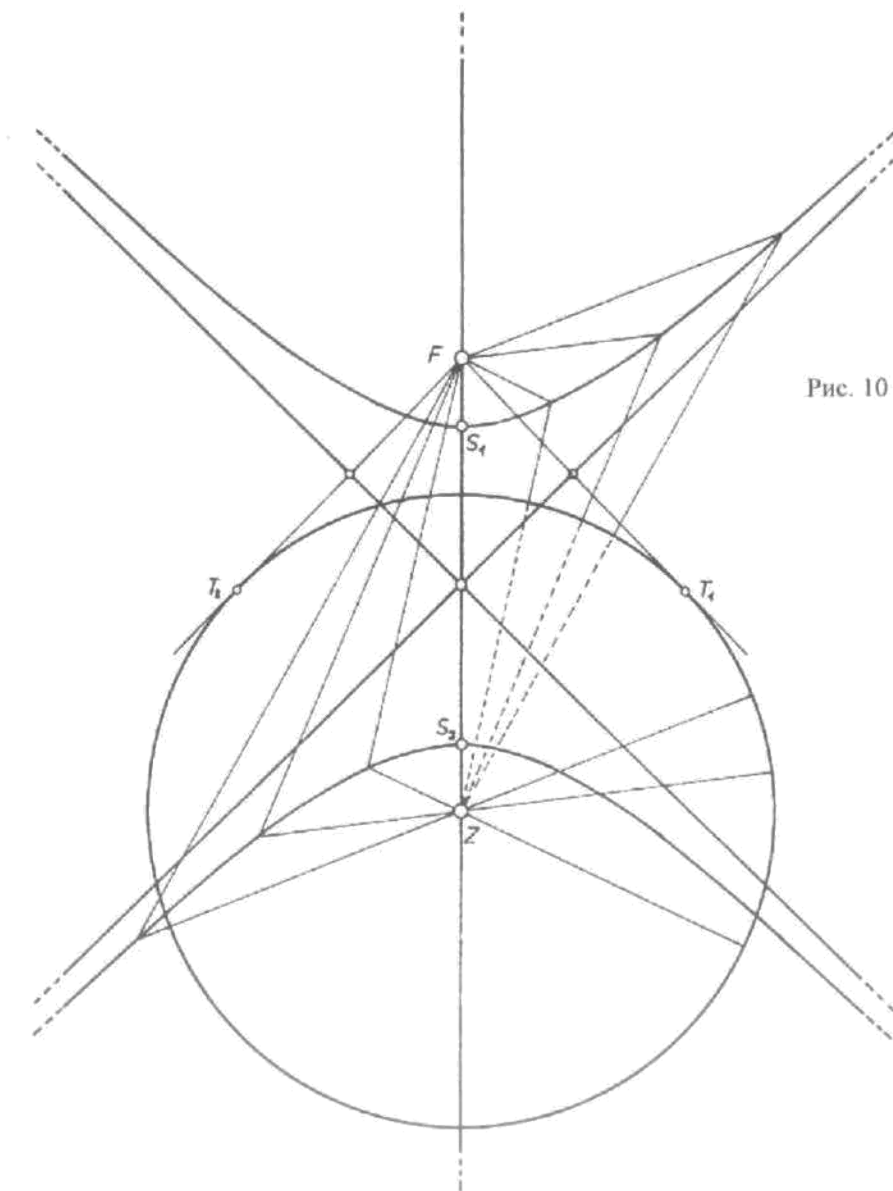


Рис. 10

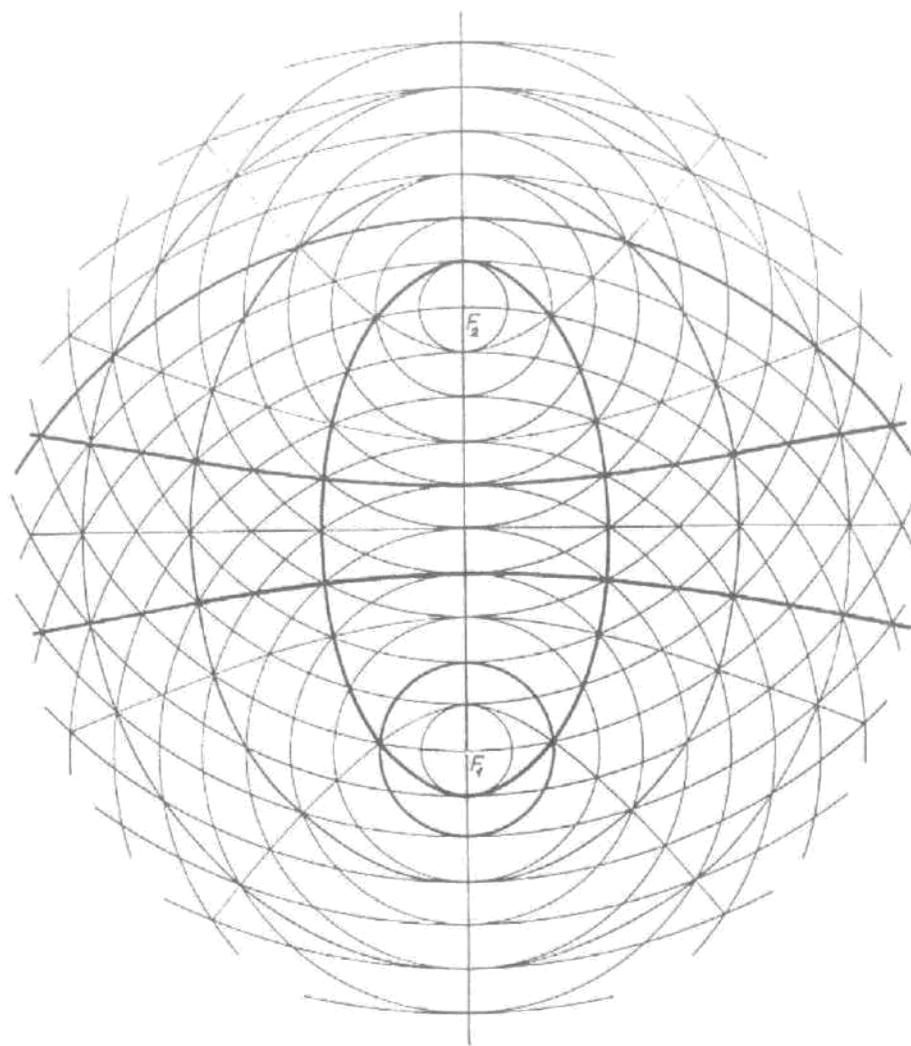


Рис. 11

Поскольку кривые взаимно перпендикулярны, говорят об ортогональных («ортогональный» значит «прямоугольный») траекториях.

Можно рассмотреть переход одних кривых в другие. Вначале мы следим за симметрией двух точек F_1 и F_2 . Симметрия в данном случае есть серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две точки, на нашем рисунке он расположен горизонтально. Представим себе, что в точке F_1 рождается и растет окружность, которая будет играть роль определяющей окружности. Уже при первом появлении окружности серединный перпендикуляр распадается на две ветви гиперболы, одна из которых направлена вверх, а другая — вниз. Чем больше радиус определяющей окружности, тем сильнее ветви гиперболы загибаются вверх и вниз. С приближением окружности ко второму фокусу ветви загибаются настолько сильно, что практически сливаются с вертикальной прямой (проходящей через оба фокуса). В пределе ветви накрывают эту прямую, причем *накрытие двойное*. Как только определяющая окружность переступает через фокус F_2 , из отрезка, соединяющего точки F_1 и F_2 , рождается постепенно растущий эллипс. Определяющая окружность и эллипсы растут и в процессе роста устремляются к бесконечно удаленной прямой.

(Просматривая эту метаморфозу, мы склонны говорить о скачке при переходе от гипербол к эллипсам: создается впечатление, что сегмент прямой, лежащий вне фокусов, скачком переходит в сегмент прямой, лежащий между фокусами. Однако важно иметь в виду, что гиперболы и эллипсы состоят не только из точек видимых, так называемых действительных, но и из точек другого рода, так называемых мнимых. С геометрической точки зрения это особые точки определенных преобразований, с алгебраической — к ним можно подойти с помощью комплексных чисел. Если дополнить наше рассмотрение действительных точек точками мнимыми, то метаморфоза приобретет вполне непрерывный характер: когда ветви гиперболы «схлопываются» на вертикальной прямой, определенные мнимые точки

переходят в действительную область и появляются точно на отрезке между фокусами. Из них затем и рождаются действительные точки эллипсов. Зато из ряда действительных точек, расположенных сверху и снизу от фокусов, возникают мнимые точки. (В главе 27 мы еще поговорим о мнимых величинах.)¹⁶

Рис. 11 можно превратить в рис. 6: представим себе, что один из фокусов, например F_2 , уходит в бесконечность. Тогда соответствующие concentрические окружности превращаются в пучок параллельных прямых на рис. 6. При этом как эллипсы, так и гиперболы превращаются в параболы.

Симметралы высшего рода

Возьмем в качестве определяющей линии l одну из симметралей (эллипс, гиперболу или параболу). Если сконструировать симметраль для одной из этих трех кривых и точки F , то возникнут совершенно новые кривые, в том числе и несимметричные. Особенно интересно, что при этом возникают особенности. Заметим, что все построения можно выполнить совершенно точно, поскольку перпендикулярами к определяющей линии в данном случае являются биссектрисы углов, образованных фокальными радиусами.

Пример: на рис. 12, 13 и 14 представлены работы одного двенадцатиклассника из школы им. Рудольфа Штейнера г. Базеля, выполненные им в рамках курсовой работы. Он построил для каждой симметралы по 40 – 50 точек вместе с касательными. Мы же приводим на каждом рисунке построение лишь для одной точки. В зависимости от положения точки F могут возникать очень сложные симметралы, многократно проходящие через бесконечность.

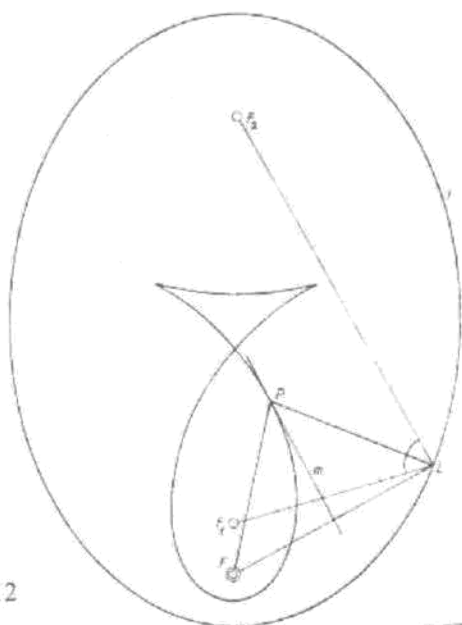


Рис. 12

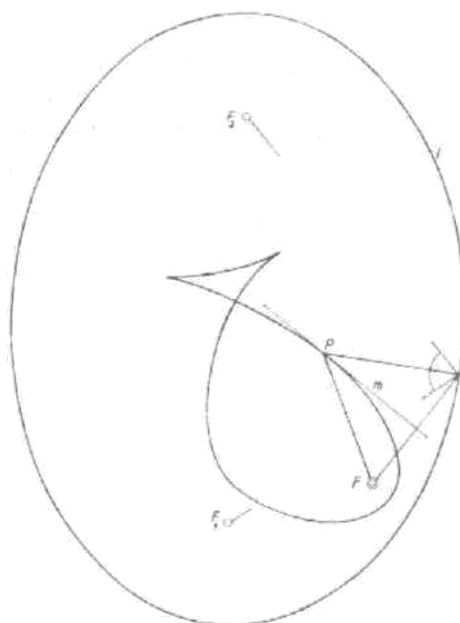


Рис. 13

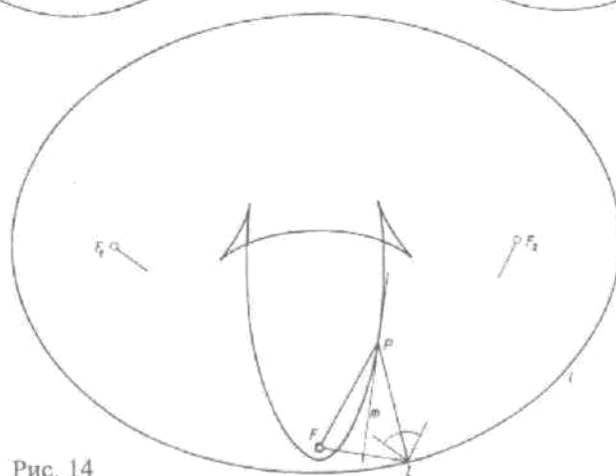


Рис. 14

¹⁶ См. также: Луис Лохер-Эрст. «Геометрические метаморфозы».

Примечание

Почему серединный перпендикуляр является касательной? Касательная t в некоторой точке P отрезка кривой характеризуется тем, что она имеет с отрезком этой кривой единственную общую точку (рис. 15). Все остальные соседние прямые пучка P пересекают нашу кривую еще и во второй точке — такие прямые мы назовем *секущими*.

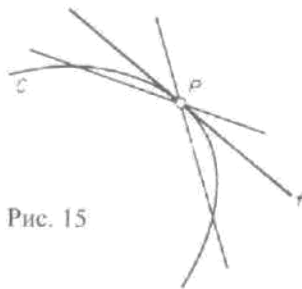


Рис. 15

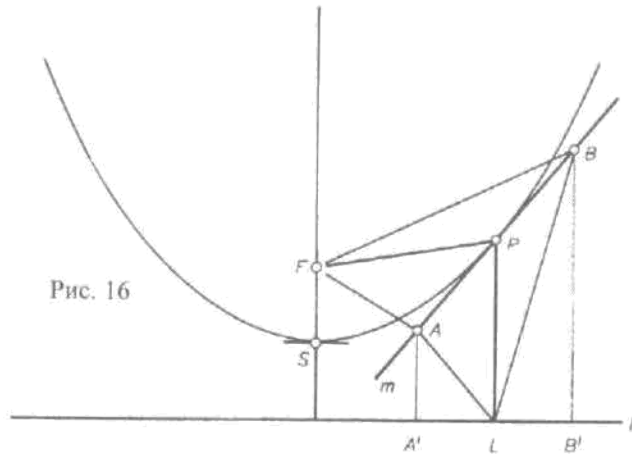


Рис. 16

Рассмотрим две соседние с P точки A и B на серединном перпендикуляре m (рис. 16). Обе эти точки равноудалены от F и L . Поскольку отрезок AA' короче отрезка AL , а значит, и короче отрезка AF , следовательно, A не может принадлежать симметрале. По тем же причинам не принадлежит симметрале и точка B (BB' короче отрезка BF). Только точка P равноудалена от l и F , следовательно, только она одна и принадлежит симметрале. Таким образом, m — касательная.

Когда определяющая прямая превращается в окружность, вышеприведенное рассуждение можно соответствующим образом видоизменить, и оно приведет нас к тому же результату.

23. Конические сечения — центральные проекции окружности

В предыдущих главах мы проектировали из вертикальной на горизонтальную плоскость «окна», ограниченные прямолинейными отрезками. В этой главе мы изменим своей привычке. Пусть в вертикальной плоскости, касаясь оси, вырезано *круговое* отверстие, которое мы будем проектировать при разных положениях центра.

В Задании № 1 к настоящей главе высота свечи выше диаметра окружности. В этом случае мы приблизительно представляем себе форму изображения: оно перестанет быть окружностью, вытянется в длину и превратится в овал. Однако мы стремимся к точным построениям. К решению задачи можно подходить различными способами. Приемы построения проекции отдельных точек окружности показаны на рис. 1. Можно построить в окружности семейство вертикальных или горизонтальных хорд и затем действовать по указанной схеме. В результате мы получим множество отдельных точек, которые вроде бы складываются в нечто целое, напоминающее следы на снегу. Остановимся на этом названии и будем именовать кривую-образ следом. Чем больше точек будет отображено, тем точнее нам удастся установить характер кривой. Я советую читателю самостоятельно поэкспериментировать.

Однако удобнее сначала вписать окружность в прямолинейные окна и затем уже отображать именно их. Так, окружность из Задания № 2 вписана в два квадрата. Вместе квадраты образуют восьмиконечную звезду. Точки касания одного квадрата лежат на диагоналях другого и тем самым точно определены. Теперь давайте отобразим эту восьмиконечную звезду. В результате мы получим восемь точек нашей кривой вместе с касательными (образы сторон квадратов касаются нашей кривой, а точки касания нам заданы диагоналями второго квадрата).

Теперь впишем кривую в восьмиконечную звезду таким образом, чтобы в точках касания она прилегала к ее сторонам. Подходящую кривую удастся нарисовать не с первого раза — приходится повозиться. Ясно, что у нашей кривой не должно быть углов и горбов — она должна закругляться равномерно (рис. 2). Мы получаем регулярную форму, пусть не окружность — эллипс (см. Приложения 1 и 2). В следующей главе мы обратимся к вопросу, есть ли у окружности и эллипса общие свойства, так сказать, «инвариантные», т.е. не исчезающие при проектировании? Ясно, что эллипс не обладает множеством свойств окружности. Но тем не менее, есть ли что-нибудь общее?

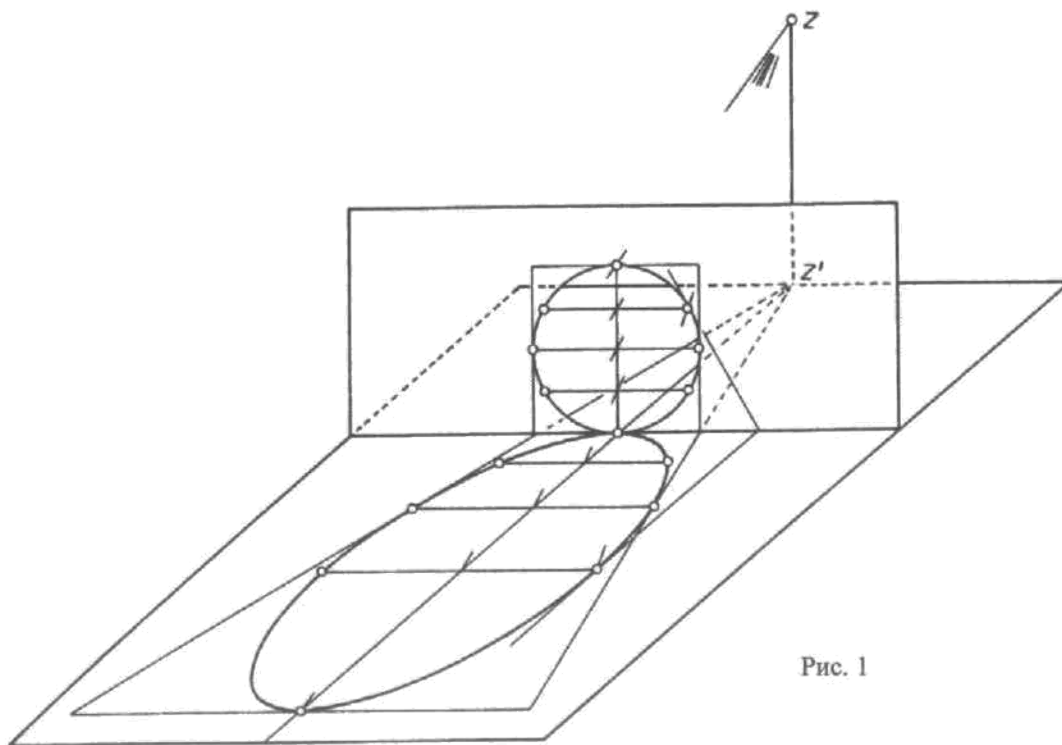


Рис. 1

Нам потребуется еще несколько специальных терминов. Если на кривой задана последовательность касательных, то мы будем называть ее *венком* (рис. 3). Касательную вместе с точкой касания будем называть *линейным элементом* (рис. 4). Касательную часто намечают кратким отрезком по обе

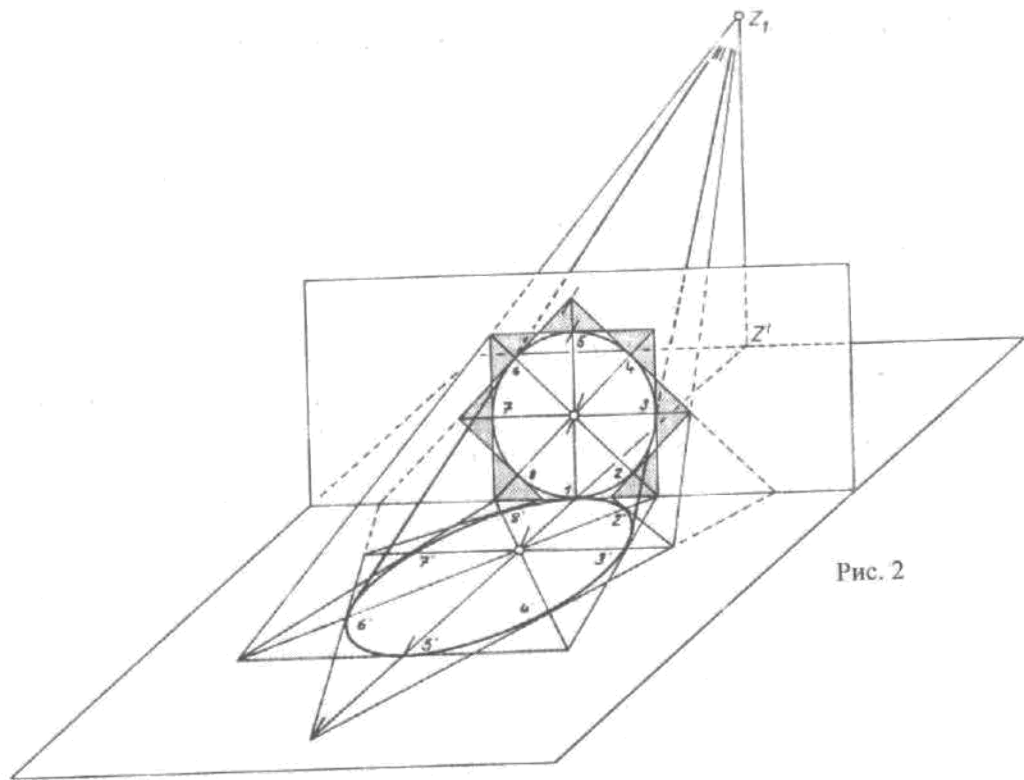


Рис. 2

стороны от точки касания. При выполнении Задания № 2 мы отобразили восемь линейных элементов окружности на восемь линейных элементов эллипса.

Теперь вернемся к нашей свече. Она «сгорает», длина и ширина эллипса соответственно растут. Особая форма рождается в тот момент, когда центр проектирования попадает на уровень верхней точки окружности (Задание № 3 и рис. 5). Касательная линейного элемента 5 отображается в бесконечно уда-



Рис. 3

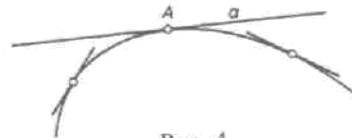


Рис. 4

ленную прямую, а точка касания — в бесконечно удаленную точку прямой m . В этой точке полученная кривая *касается* бесконечно удаленной прямой. Кривая, впрочем, нам хорошо известна по прошлой главе как *парабола*. (См. также Приложение 2). Образ квадрата с вертикальными и горизонтальными сторонами демонстрирует ряд замечательных особенностей: его стороны, например, параллельны диагоналям!

Когда центр опускается еще ниже — допустим, на уровень центра окружности (Задание № 4, рис. 6), — в бесконечности оказывается горизонтальная диагональ, проходящая через центр. Нижняя половина круга отобразится вперед, верхняя — назад. Квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами отображается так, что в образе теперь параллельны диагонали!

Кривая превращается в гиперболу (см. Приложение 2). Линейные элементы 3 и 7 становятся ее асимптотами (соответствующие точки касания переходят в бесконечность). Можно мысленно провести линейный элемент по окружности, начиная с точки 1 через точки 2, 3, ... и так далее, пока вы не придете назад. Можно проследить, как образ линейного элемента обходит гиперболу. И снова мы убеждаемся в том, что гипербола — замкнутая кривая!

Три полученные кривые называются *коническими сечениями*, поскольку свет, проходящий через круглое окно, порождает световой конус. На рис. 6 изображен *прямой* круговой конус, на рис. 2 и 5 — *наклонный*. Конусы рассечены горизонтальной плоскостью. Если плоскость сечения параллельна *двум* образующим (прямая, соединяющая центр Z с точками 3 и 7), то в сечении возникает гипербола, если *одной* (прямая, соединяющая Z с точкой 5), то парабола, и если ни одной, то эллипс.

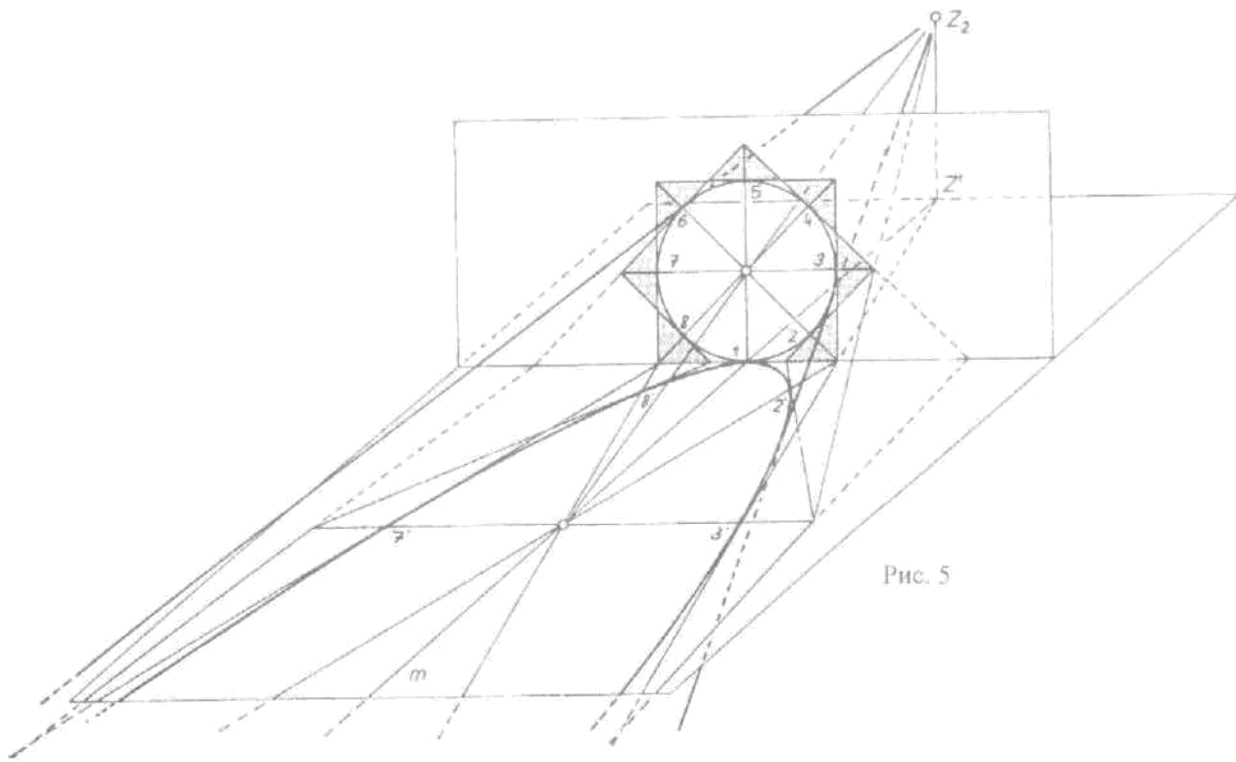


Рис. 5

Если пробежать гиперболу (в соответствии с номерами точек), то внутренняя область гиперболы при обходе задней ветви оказывается справа по направлению обхода.

Из всего сказанного следует, что параболу можно понимать как эллипс, касающийся бесконечно удаленной прямой, а гиперболу как эллипс, пересекаемый бесконечно удаленной прямой.

Это соображение еще раз объясняет родство (и тождественность) данных кривых.

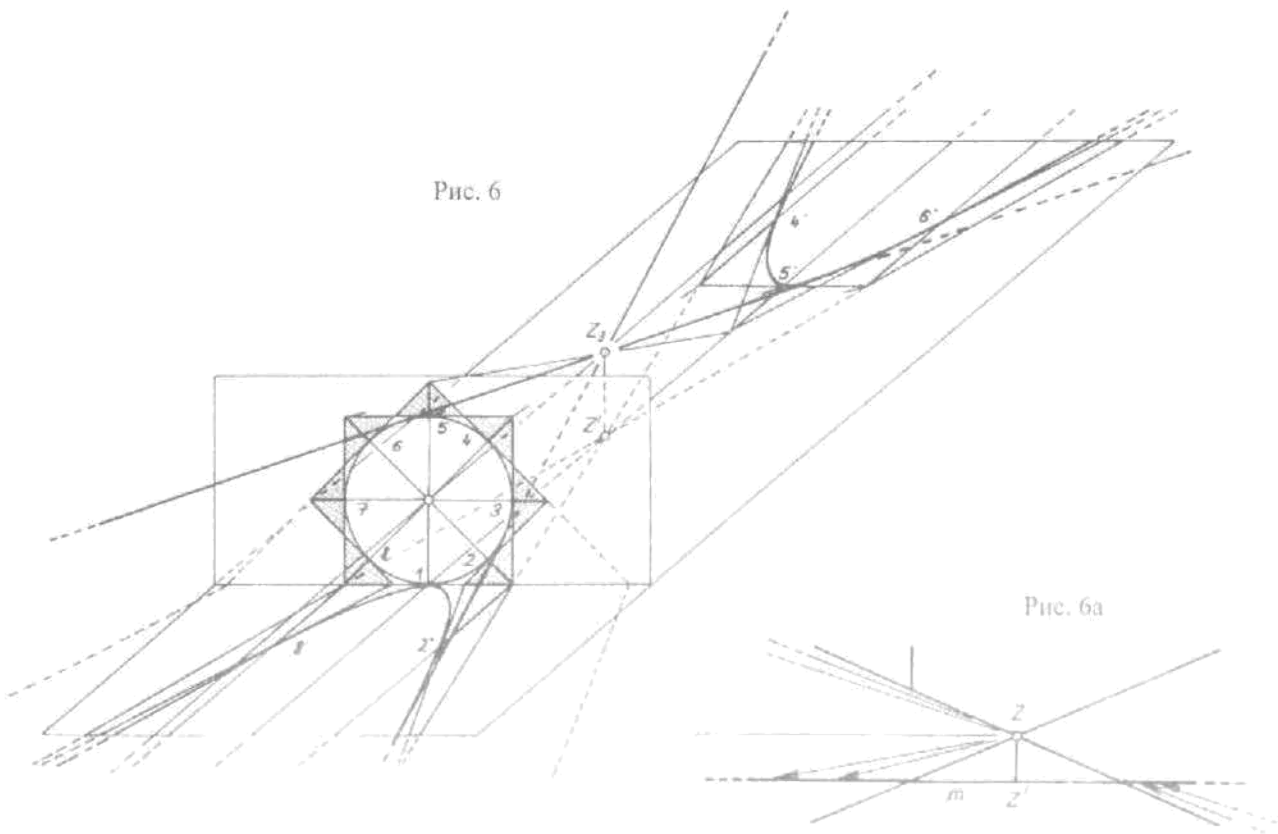


Рис. 6

Рис. 6а

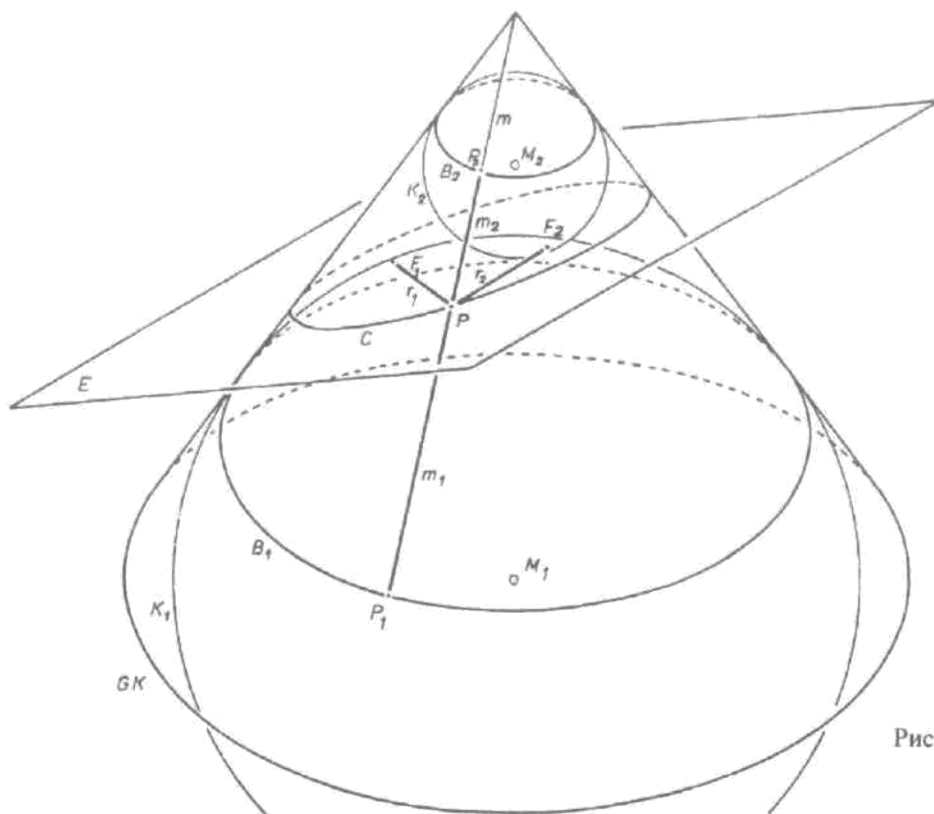


Рис. 7

Приложение 1

Французский математик Данделин в возрасте 19 лет нашел очень красивое доказательство того факта, что плоские сечения прямого конуса (вершина конуса находится точно над центром окружности-основания) являются эллипсами, параболой или гиперболами. Мы приведем это доказательство для случая эллипса (рис. 7). Пусть GK — окружность-основание конуса, E — секущая плоскость и C — сечение. Как снизу, так и сверху от сечения в конус можно вписать ровно один шар, который касается плоскости E (это так называемые шары Данделина). B_1 и B_2 — окружности, по которым шары касаются конуса, F_1 и F_2 — точки касания шаров с плоскостью сечения. Рассмотрим на кривой C произвольную точку P и соединим ее отрезками r_1 и r_2 с точками касания F_1 и F_2 . Кроме того, проведем через точку P образующую m . Эта образующая пересекает окружности B_1 и B_2 в точках P_1 и P_2 . Обратим внимание, что и отрезок r_1 , и отрезок $m_1 = PP_1$ являются отрезками касательных к шару K_1 . Но все касательные к шару из некоторой точки P имеют одну и ту же длину. Значит, отрезки r_1 и m_1 равны. Аналогично доказывается равенство отрезков r_2 и m_2 (они являются отрезками касательных, проведенных из точки P к шару K_2). Когда точка P движется по кривой C , длины отрезков m_1 и m_2 меняются, но их сумма ($m_1 + m_2$) остается постоянной, поскольку отрезок образующей между двумя параллельными окружностями на протяжении всей кривой имеет постоянную длину. Значит, не меняется и сумма длин отрезков $r_1 + r_2$. Следовательно, C — эллипс, а точки касания F_1 и F_2 — его фокусы.

На рис. 6 конус также прямой (поскольку центр Z находится точно на уровне центра окружности), а его ось — горизонтальна. Предоставим читателю самому представить себе в этой ситуации шары Данделина. Их положение легко установить, обратившись к рис. 6а. Рассмотрение отрезков образующей показывает, что на этот раз постоянна разность $r_1 - r_2$.

В случае параболического сечения (снова в *прямом* конусе) имеется только *один* шар Данделина. Директриса параболы получается при пересечении плоскости сечения E и плоскости, в которой расположена окружность касания конуса и шара Данделина.

Приложение 2

Для интересующихся вопросами аналитической геометрии приведем уравнение центральных проекций окружности. Высота свечи h может рассматриваться в качестве параметра для всего семейства конических сечений. Заметим, что всегда интересно сравнивать рисунок и уравнение.

Вычислим координаты (\bar{x}, \bar{y}) точки P на окружности как функцию от координат (x, y) центральной проекции P' (рис. 8).

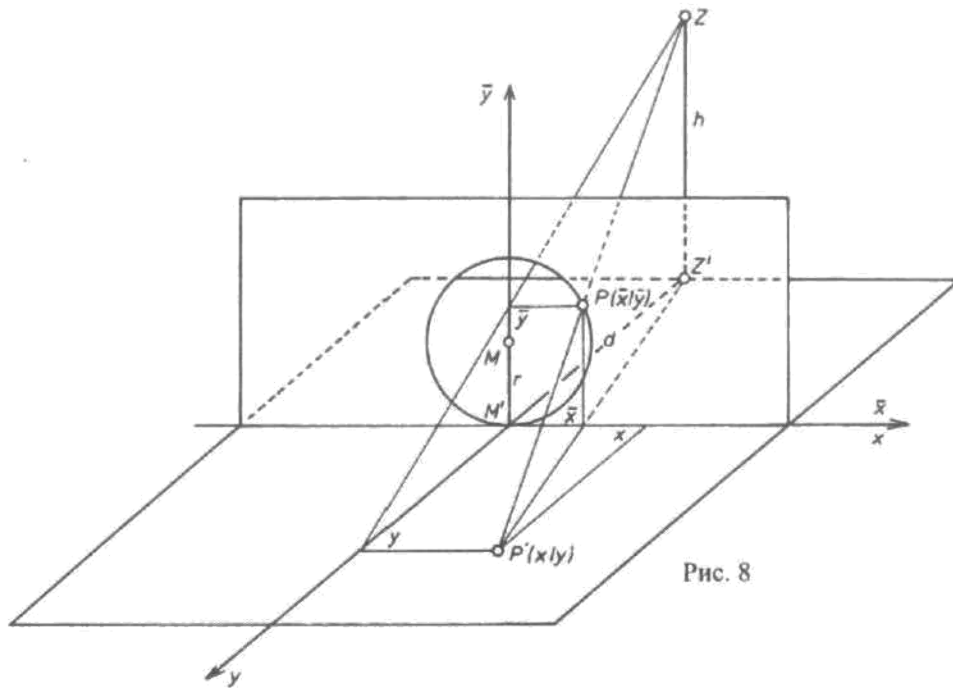


Рис. 8

$$\frac{\bar{y}}{h} = \frac{y}{y+d} \quad \bar{y} = \frac{y}{y+d} \cdot h$$

$$\frac{\bar{x}}{x} = \frac{d}{y+d} \quad \bar{x} = \frac{d}{y+d} \cdot x = \frac{x}{y+d} \cdot d$$

Окружность: $\bar{x}^2 + (\bar{y} - r)^2 = r^2$
 $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2r\bar{y} = 0$

$$\frac{x^2}{(y+d)^2} \cdot d^2 + \frac{y^2}{(y+d)^2} \cdot h^2 - 2r \cdot \frac{y}{y+d} \cdot h = 0 \quad | \cdot (y+d)^2$$

$$x^2 \cdot d^2 + y^2 \cdot h^2 - 2rhy(y+d) = 0$$

$$x^2 \cdot d^2 + y^2 \cdot h^2 - 2rhy^2 - 2rhyd = 0$$

$$x^2 \cdot d^2 + (h^2 - 2rh)y^2 - 2rhd = 0$$

Мы получили уравнение второго порядка для центральной проекции окружности (с параметром h).

Специальные случаи h :

1 случай: $h = 4r$ (рис. 2)
 $d^2x^2 + 8r^2y^2 - 8r^2dy = 0$

Преобразуем:

$$\frac{x^2}{2r^2} + \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 1$$

эллипс с $M\left(0, \frac{d}{2}\right)$, $a = \sqrt{2} \cdot r$, $b = \frac{d}{2}$

2 случай: $h = 2r$ (рис. 5)

$$d^2x^2 - 4r^2dy = 0$$

$$y = \frac{d}{4r^2} \cdot x^2$$

3 случай: $h = r$ (рис. 6)

$$d^2x^2 - r^2y^2 - 2r^2dy = 0$$

$$-\frac{x^2}{r^2} + \frac{(y+d)^2}{d^2} = 1$$

парабола с вершиной $S(0, 0)$
и параметром $p = \frac{2r^2}{d}$

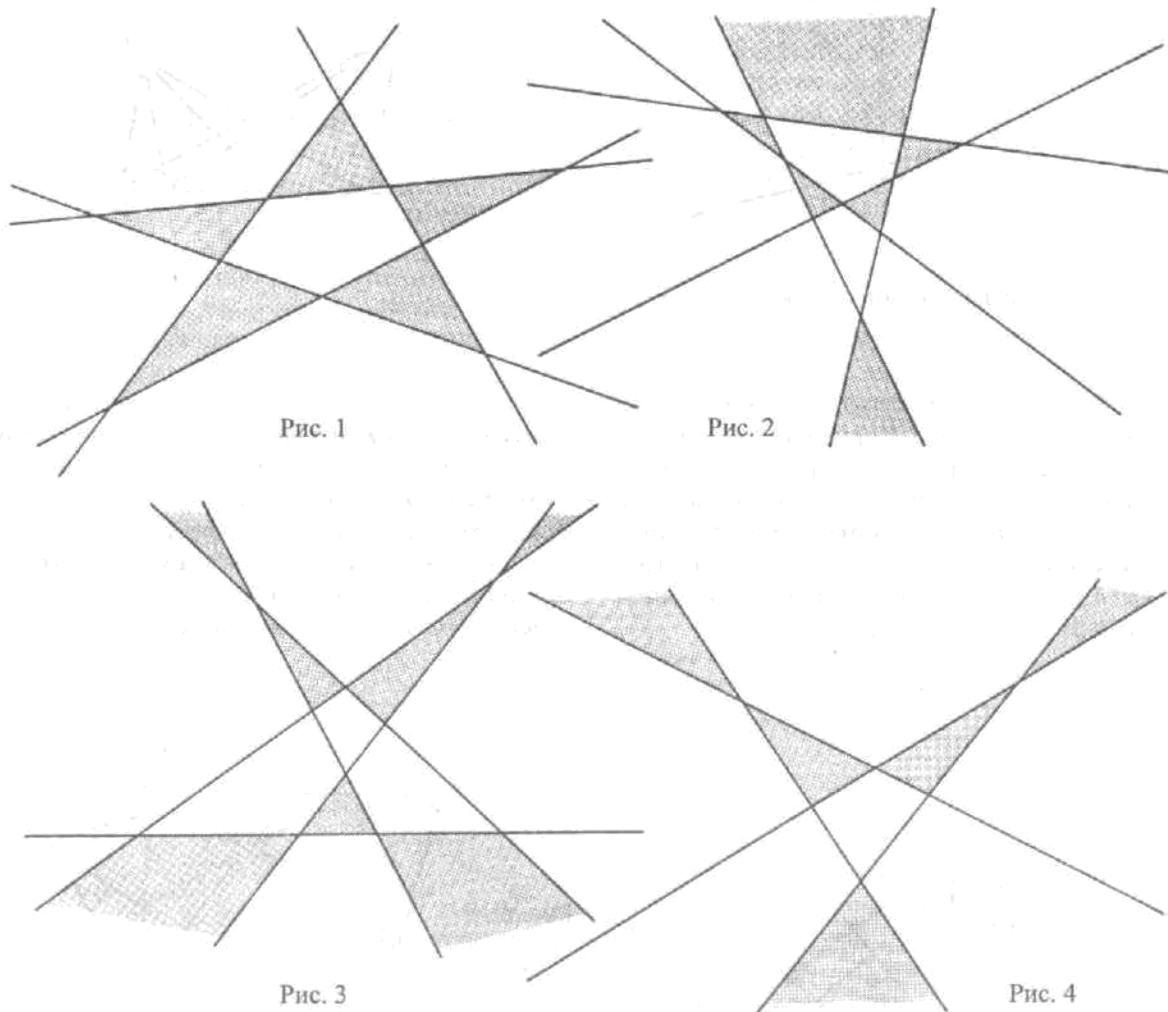
гипербола с $M(0, -d)$, $a = r$, $b = d$.

24. Эллипс, парабола и гипербола в пятиконечной звезде – шестиугольники Паскаля и Брианшона

Мы взглянули на эллипсы, параболы и гиперболы с двух точек зрения: как на симметралах и как на центральных проекциях окружности.

Есть еще один, совершенно иной подход к этой теме, не имеющий никакого отношения к окружности.

Оказывается, определяющим для всех трех кривых является число «5». Если мы нарисуем на плоскости 5 прямых общего положения, то всегда получится одна и та же картинка: пятиконечная звезда, которая делит точечное поле определенным образом на отдельные множества (рис. 1). Одно из этих множеств в любом случае пятиугольное — оно с пяти сторон окружено пятью треугольными областями. Остаток плоскости занят пятью четырехугольными множествами. В зависимости от расположения прямых пятиконечная звезда находится в различном отношении к бесконечности. На рис. 2 через бесконечность проходит одно из треугольных множеств (лучей звезды). (Можно представить себе, что верхняя вершина на рис. 1 проведена через бесконечность.) Однако пятиугольное множество все еще лежит целиком в конечной области. Равно как и одно из четырехугольных множеств. Если протащить через бесконечность не только вершину, но и весь верхний треугольник, то возникает фигура на рис. 3. Пятиконечное множество проходит теперь через бесконечность, однако оно по-прежнему окружено пятью треугольниками. При этом два из них также проходят через бесконечность. Три из пяти четырехугольных множеств лежат целиком в конечной области. Рис. 4 иллюстрирует пограничное положение: пятая прямая является бесконечно удаленной, ее касаются пятиугольное множество и три луча.



С этой пятиконечной звездой теснейшим образом связаны эллипс, парабола и гипербола. Можно сказать, отсюда они рождаются.

Прежде чем мы опишем, как по пятиконечной звезде строится одна из этих кривых, поясним важнейшие понятия:

1. Ряды точек a и b перспективны друг другу, и точки ряда a (A_1, A_2, A_3, \dots) соответственно перспективны точкам ряда b (B_1, B_2, B_3, \dots), если прямые, соединяющие соответствующие точки двух рядов, сходятся в центре Z (рис. 5а). Такое перспективное соответствие называется *центральным*.

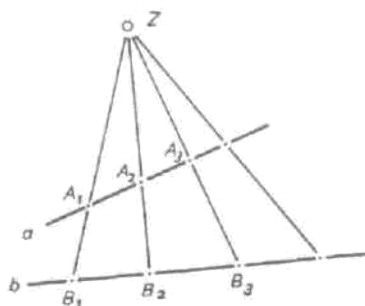
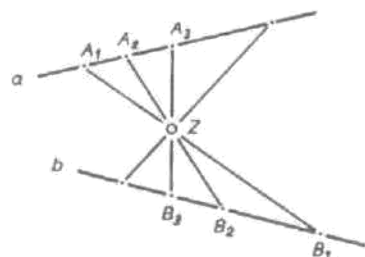


Рис. 5а



Можно рассматривать и композицию перспективных отображений.

2. На рис. 6а ряд точек a перспективно отображается на ряд точек b , а он, в свою очередь, перспективно отображается на ряд точек c . В этом случае мы говорим, что ряды точек a и c отображаются друг на друга *проективно*. Соответствующее отображение мы будем называть *проективным*. Точки ряда a (A_1, A_2, A_3, \dots) соответственно *проективны* точками ряда c (C_1, C_2, C_3, \dots).

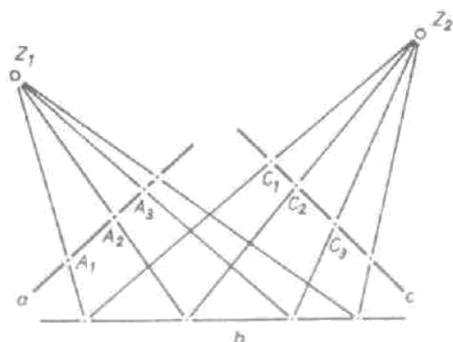


Рис. 6а

Пучки прямых A и B перспективны друг другу, и прямые пучка A (a_1, a_2, a_3, \dots) соответственно перспективны прямым пучка B (b_1, b_2, b_3, \dots), если точки пересечения соответствующих прямых двух пучков лежат на одной оси z (рис. 5б). Такое перспективное соответствие называется *осевым*.

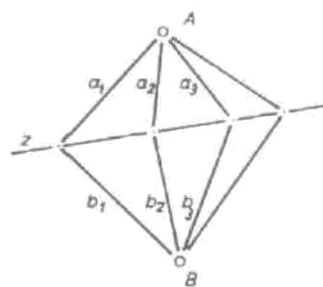
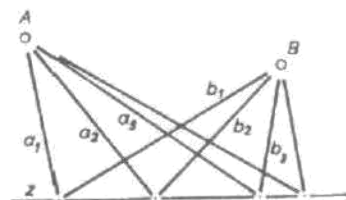


Рис. 5б



На рис. 6б пучок прямых A перспективно отображается на пучок прямых B , а он, в свою очередь, перспективно отображается на пучок прямых C . В этом случае мы говорим, что пучки A и C отображаются друг на друга *проективно*. Соответствующее отображение мы будем называть *проективным*. Прямые пучка A (a_1, a_2, a_3, \dots) соответственно *проективны* прямым пучка C (c_1, c_2, c_3, \dots).

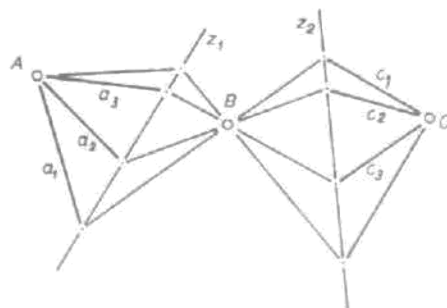


Рис. 6б

Если рассматривается композиция более чем двух перспективных отображений, то говорят, что первая и последняя фигуры *проективны* друг другу.

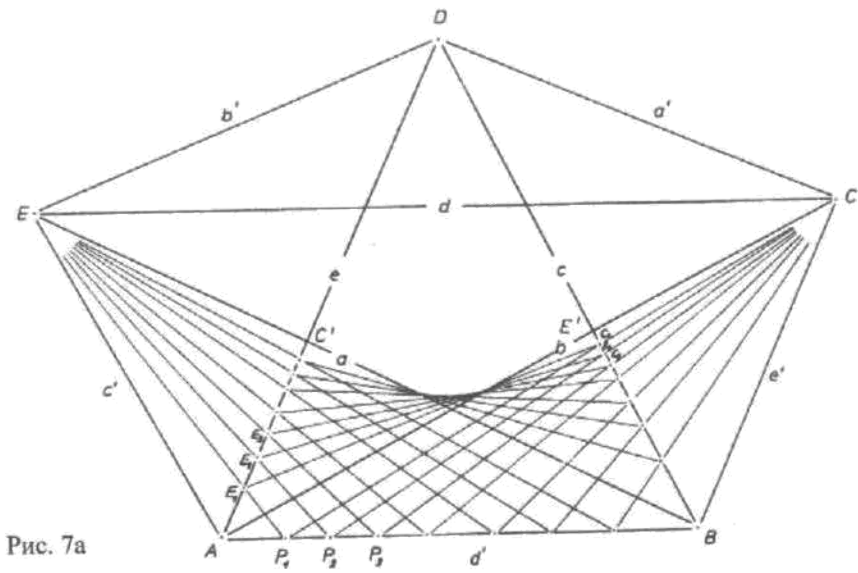


Рис. 7а

Для построения кривых рассмотрим пятиконечную звезду, лучи которой целиком лежат в конечной области (рис. 7а). Соединим друг с другом вершины лучей так, чтобы пятиконечная звезда оказалась вписанной в пятиугольник. На стороне d' выберем произвольную последовательность точек P_1, P_2, P_3, \dots , неважно, на одинаковом или на равном расстоянии друг от друга. Эти точки мы соединим с вершинами E и C . Проведенные прямые задают проективное отображение друг на друга отрезков AC' и $E'B$. Соответственно проективными друг другу оказываются ряды точек (E_1, E_2, E_3, \dots и C_1, C_2, C_3, \dots). Соединительные прямые образуют венки касательных к отрезку некоторой кривой между a и b . На рис. 8а та же конструкция проведена по отношению к стороне a' . Соответствующее построение для сторон b', c' и e' предоставляется читателю. Следующее замечание может помочь вам при этом. Соедините выбранные точки P_1, P_2, P_3, \dots с обеими соседними вершинами. В результате возникнут два пучка прямых. Теперь двигайтесь от точки P_1 (P_2, P_3, \dots) по направлению к первой вершине, пересеките первую сторону треугольного луча и найдите точку пересечения со *второй* стороной. Затем двигайтесь от P_1 (P_2, P_3, \dots) ко второй стороне, пересеките первую сторону другого треугольного луча, минуя ее и зафиксируйте точку пересечения со *второй* стороной, и вы получите две проективные точки. На рис. 9а эта конструкция проведена полностью. Она гораздо понятнее: дело в том, что вспомогательные прямые только намечены. Пять венков касательных складываются в один общий венки вокруг эллипса! Поверь-

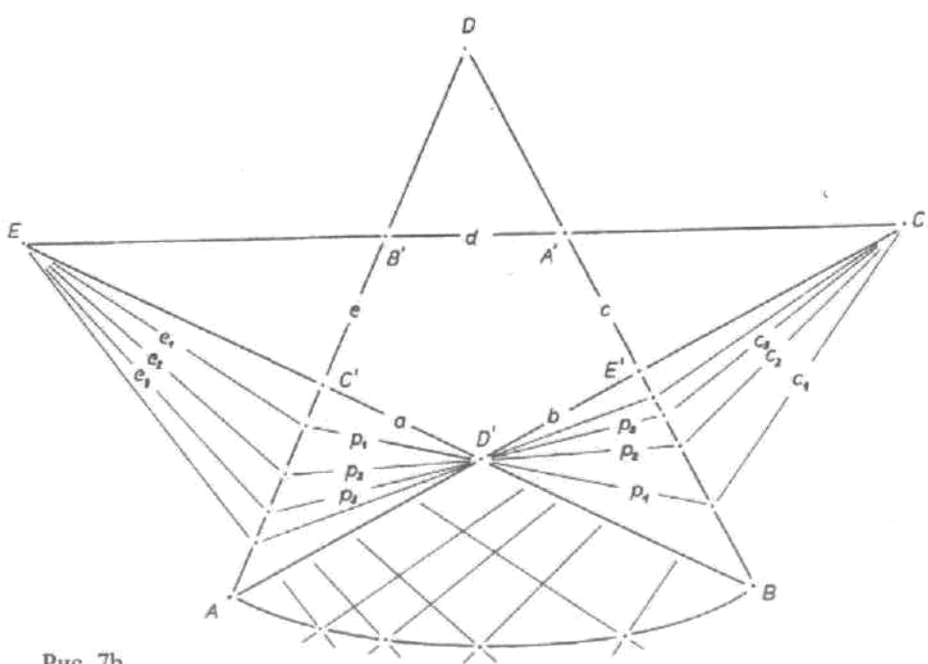


Рис. 7б

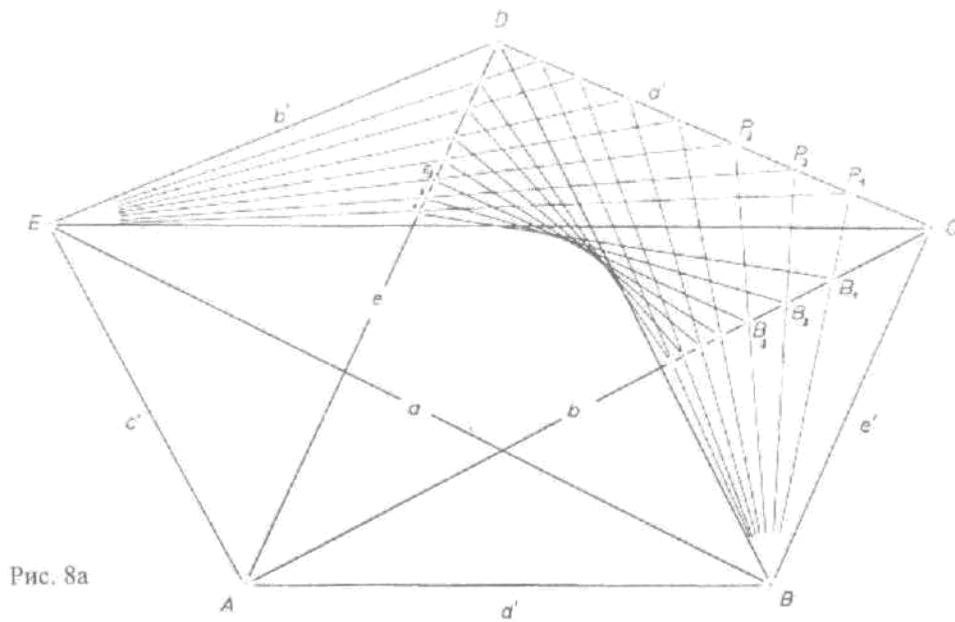


Рис. 8а

те, если вы будете терпеливо упражняться до тех пор, пока не освоитесь с построением, это принесет свои плоды.

Двойственная конструкция: лучи звезды внутренне пересекаются в точках A', B', C', D', E' . Звезда обнимает пятиугольник с вершинами в этих точках (рис. 7b). Через точку D' мы проведем произвольные прямые p_1, p_2, p_3, \dots . Их точки пересечения со сторонами AC' и $E'B$ мы соединим с вершинами E и C . В результате в E и C возникают два проективных пучка. Пары проективных прямых (e_1, e_2, e_3, \dots и c_1, c_2, c_3, \dots) мы пересечем друг с другом. Точки пересечения дадут нам след некоторой кривой между A и B . На рис. 8b то же построение выполнено для точки A' . Точки B', C', E' оставляются читателю. На рис. 9b приведен готовый результат. Пять следов объединяются в один общий след — эллипс! Также и в данном случае конструкция более понятна, если вспомогательные прямые не проводятся до конца, а только намечаются.

Итак, с пятиконечной звездой связаны две кривые. Одна проходит через пять вершин и объемлет звезду, ее мы строим по точкам. Другая лежит внутри звезды, в пятиугольном точечном множестве. Ее конструируют с помощью прямых. Мы можем говорить о вписанной и описанной кривых.

Такие же вписанные и описанные кривые можно построить и для звезд, показанных на рис. 2, 3 и 4. Рис. 10 демонстрирует описанную кривую к звезде рис. 2. Здесь возникает гипербола. Соответствующую

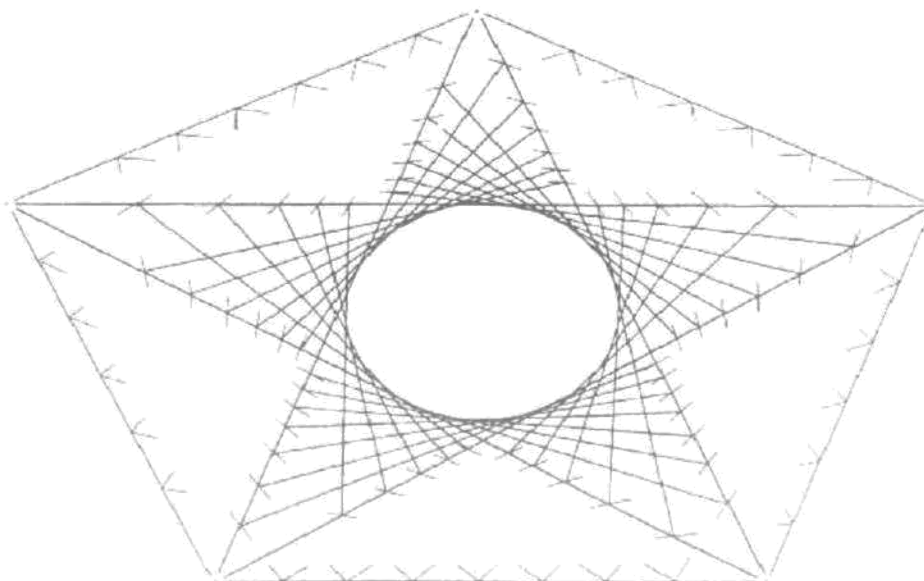


Рис. 9а

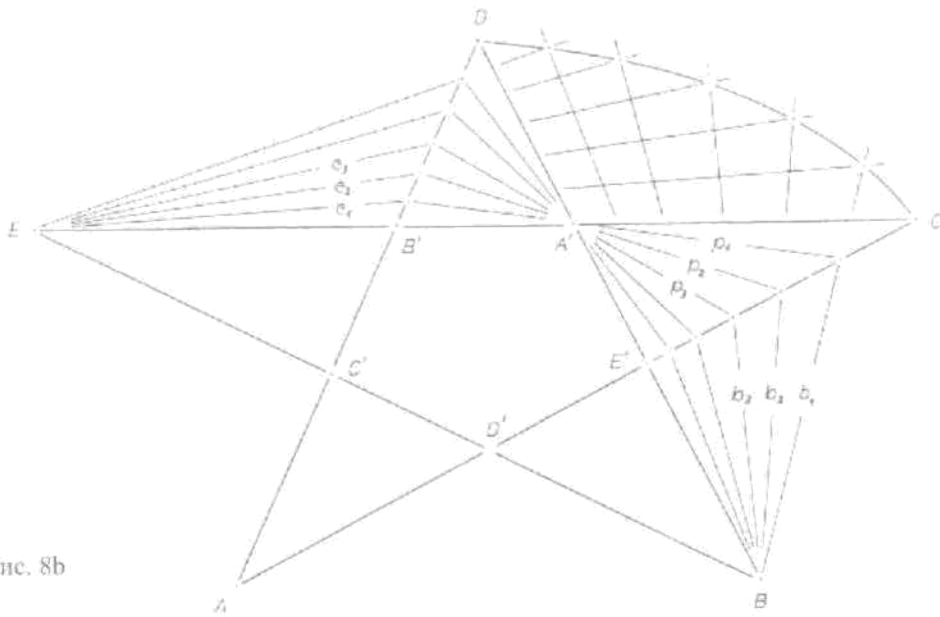


Рис. 8b

шая вписанная кривая — эллипс. Обе кривые следующей звезды (рис. 3) — гиперболы. На рис. 4 представлена звезда, описанная кривая которой является гиперболой, а вписанная — параболой.

Те же кривые можно построить при помощи *одного-единственного проективного соответствия*. Рассмотрим, например, рис. 7a: мы проективно отображали друг на друга только сегмент AC' точечного ряда e и сегмент $E'B$ точечного ряда c .

Однако никто не мешает нам отобразить ряд e на ряд c *полностью*. Каждой точке одного ряда соответствует точка другого ряда. На рис. 11a точка E_{-1} отображается в точку C_{-1} тем же самым преобразованием, что и на рис. 7a. Их соединительная прямая является касательной к вписанной кривой. Так же можно отобразить и бесконечно удаленную точку прямой c , которая помечена номером 11, в точку E_{11} . Соответствующая соединительная прямая также касается вписанной кривой. В результате мы получим *все* касательные. Совокупность соединительных прямых пар проективных точек мы назовем *пучком прямых второго порядка*.

Ответ на вопрос, почему можно перейти к другим проективным соответствиям (например, между b и e , рис. 8a) и в результате составить вписанную кривую из пяти кусков, выходит за рамки данной книги. Он основывается на так называемой основной теореме проективной геометрии, которая упомянута в Приложении.

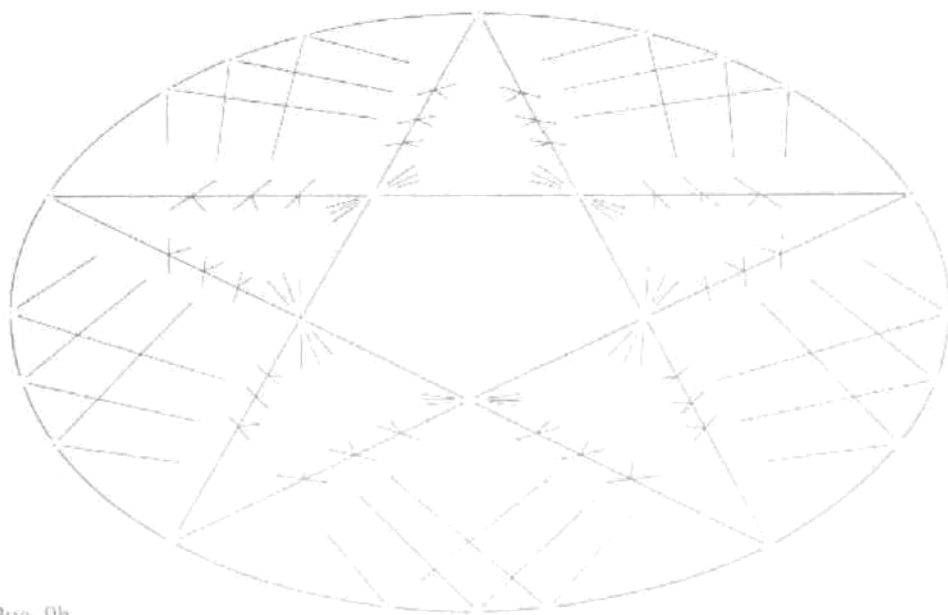


Рис. 9b

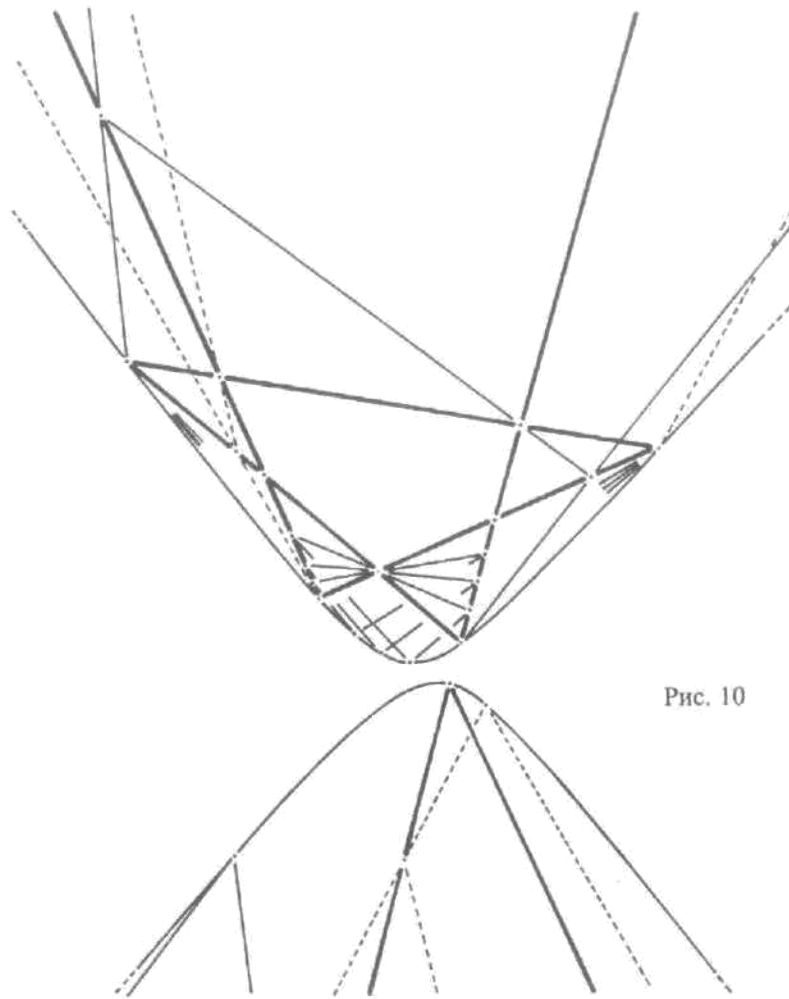


Рис. 10

Равным образом можно свести построение описанной кривой к одному-единственному проективному преобразованию, отображающему, например, пучок E на пучок C (рис. 7b) (построение намечено на рис. 11b). Совокупность всех точек пересечения соответствующих пар проективных прямых мы назовем *рядом точек второго порядка*.

Итак, третий подход к эллипсу, параболе и гиперболу можно кратко описать следующим образом:

Проективное соответствие двух точечных рядов порождает семейство соединительных прямых (пучок прямых 2-го порядка), огибающей которого является эллипс, парабола или гипербола. Пучок прямых 2-го порядка определяется пятью прямыми (лучами звезды).

Если, отталкиваясь от некоторых пяти прямых, построить пучок прямых 2-го порядка и выбрать из него другие 5 прямых, то получится новая звезда, но породит она тот же пучок.

В специальном случае эллипс может превратиться в окружность.

Примечательно, что ни в одном из построений не использовалась окружность. Мы либо пересекли прямые, либо соединяли друг с другом точки. Кривые возникали в результате взаимодействия точек и прямых.

Теперь рассмотрим фигуры, которые получаются, если к пяти лучам звезды прибавить одну-единственную прямую пучка или к пяти вершинам — одну-единственную точку точечного ряда 2-го порядка. Итак, вокруг вписанной кривой лежит шестисторонник (рис. 12a) или на описанной кривой лежит

Проективное соответствие двух пучков прямых порождает семейство точек пересечения (ряд точек 2-го порядка), лежащих на эллипсе, параболе или гиперболу. Ряд точек 2-го порядка определяется пятью точками (вершинами звезды).

Если, отталкиваясь от некоторых пяти точек, построить ряд точек 2-го порядка и выбрать из него другие 5 точек, то получится новая звезда, но породит она тот же ряд.

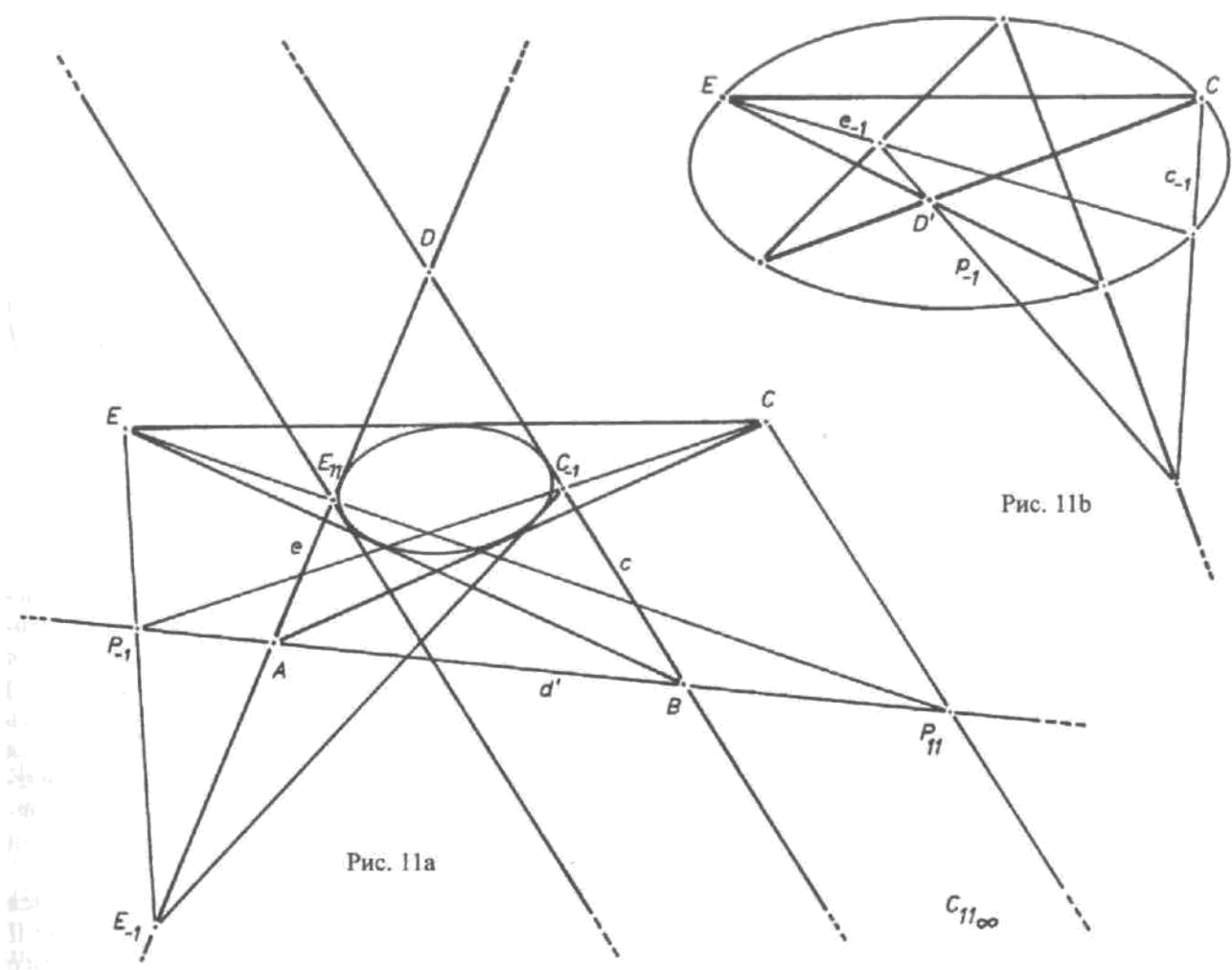


Рис. 11а

Рис. 11б

шестиугольник (рис. 12b¹⁷). Шестисторонник (рис. 12а) обладает интересным свойством: он сам в себе центрирован, тогда как шестиугольник (рис. 12b) сам в себе линирован. Поясним сказанное, прибегнув вначале к помощи окружности. Возьмем окружность (рис. 13а) и опишем вокруг нее шестисторонник, затем соединим противоположные вершины. Какой бы мы ни выбрали шестисторонник (совсем не обязательно, чтобы он был правильным), всегда эти прямые пройдут через одну точку (конечно, не всегда эта точка совпадет с центром окружности, как в правильном шестистороннике). Такая точка, оказывается, существует всегда, когда шестисторонник огибает эллипс, параболу или гиперболу. В честь математика, впервые ее открывшего, она называется *точкой Брианшона*.

Двойственное рассмотрение: Впишем в окружность произвольный шестиугольник (рис. 13б). Далее пересечем противоположные стороны и обнаружим, что точки пересечения (выделены кружками) всегда лежат на одной прямой! То есть шестиугольник *линирован*. Прямая называется *прямой Паскаля*. Она существует всегда, когда вершины шестиугольника лежат на окружности, эллипсе, параболе или гиперболе. Когда в окружность вписан правильный шестиугольник, прямая Паскаля совпадает с бесконечно удаленной прямой.

Но, кроме того, обнаруживается, что такие шестисторонники и шестиугольники (в дальнейшем называемые шестиугольниками Паскаля и Брианшона) обладают одним примечательным свойством: они имеют несколько центров и осей. Поясним сказанное на примере правильного шестиугольника и шестисторонника. Произвольно пронумеруем стороны шестисторонника Брианшона цифрами от 1 до 6 (рис. 14а) и затем пересечем следующие друг за другом стороны. Если соединить противоположные точки — (1,2) с (4,5) = I, (2,3) с (5,6) = II, (3,4) с (6,1) = III — то соединительные прямые всегда будут проходить через точку Брианшона. Потренируйтесь и пронумеруйте точки иначе, чем это сделано на трех нижеследующих рисунках.

¹⁷ Значение чисел, указанных на чертежах, станет ясным из рис. 14а и 14б.

Рис. 12а

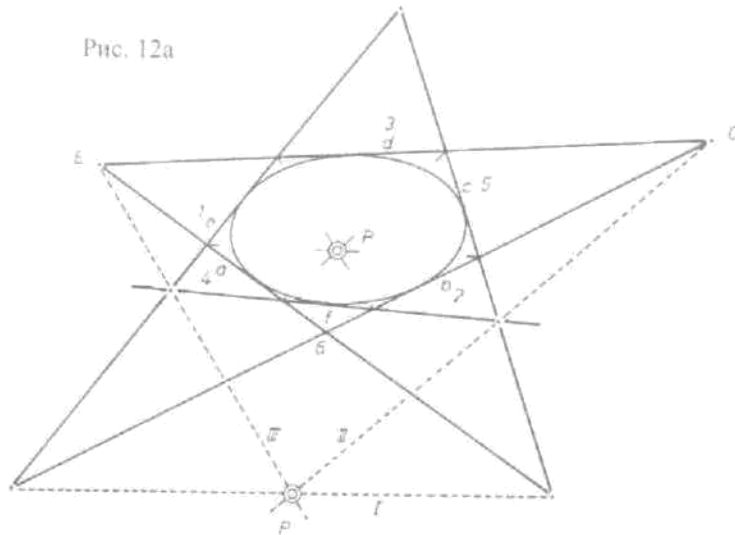
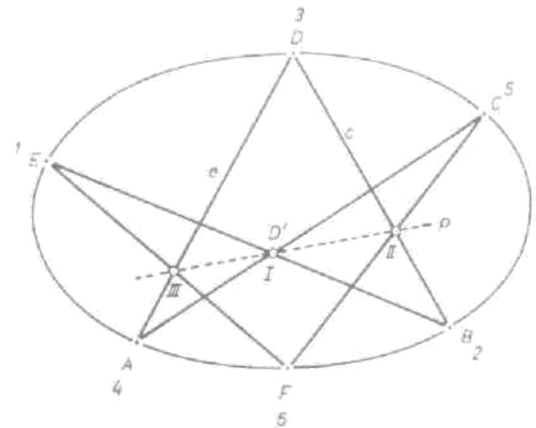


Рис. 12b



Двойственное рассуждение: Произвольным образом пронумеруем вершины шестиугольника Паскаля цифрами от 1 до 6 (рис. 14b). Затем соединим следующие друг за другом точки и пересечем противоположащие прямые: $(1,2)$ с $(4,5) = I$, $(2,3)$ с $(5,6) = II$, $(3,4)$ с $(6,1) = III$. Получившиеся точки пересечения всегда будут лежать на одной прямой (прямой Паскаля). (Потренируйтесь на собственных примерах.) А, кстати, сколько вариантов скрывается в одном чертеже? Из комбинаторики нам известно, что шесть точек или прямых можно пронумеровать $6! = 720$ способами. Однако различные фигуры рождаются только из 60 нумераций, поскольку неважно, с какой точки мы начинаем нумеровать и в каком направлении нумерация происходит. Но в остальном каждый описанный шестисторонник имеет 60 точек (Брианшона), и каждый вписанный шестиугольник имеет 60 прямых (Паскаля)! То есть он 60 способами центрирован или линирован в самом себе. Не правда ли, своеобразная закономерность?

Теперь мы можем по-новому взглянуть на рис. 12а: в данной нумерации нижняя точка P является точкой Брианшона. Если эта точка начинает двигаться и проходит вдоль всей прямой I , то прямая II проходит весь пучок с вершиной C , а прямая III — весь пучок с вершиной E . При этом ряды точек e и c проективно отображаются друг на друга, а f огибает эллипс (рис. 7а).

Рис. 13а

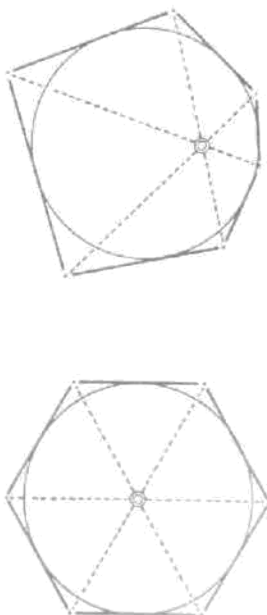
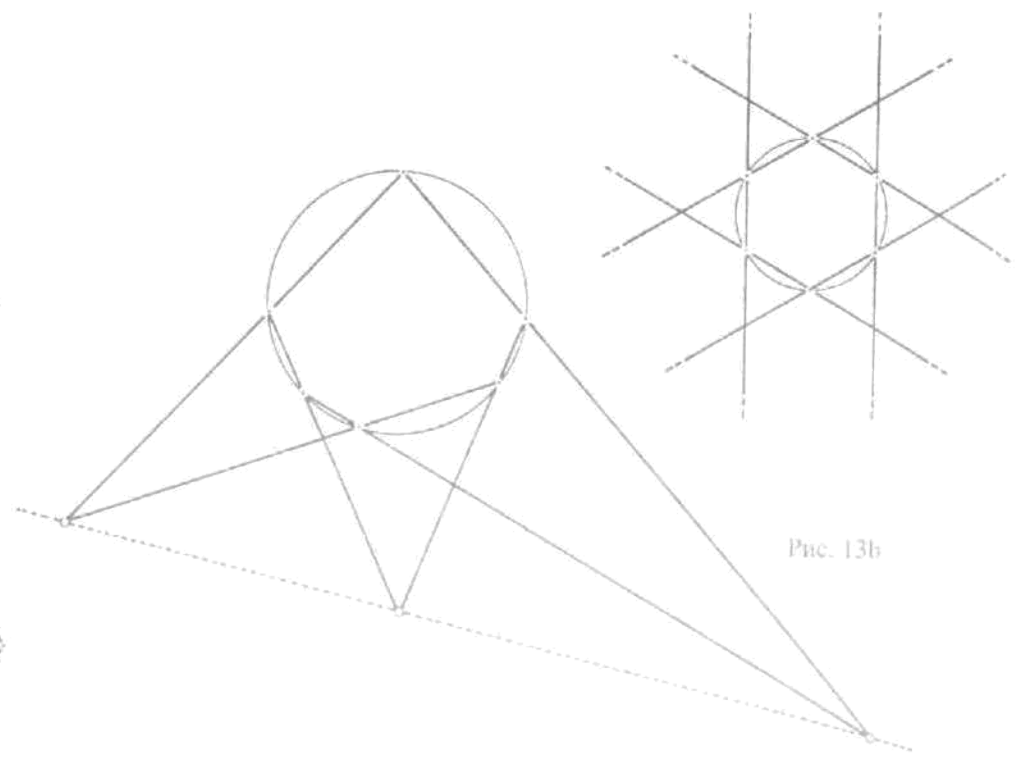


Рис. 13b



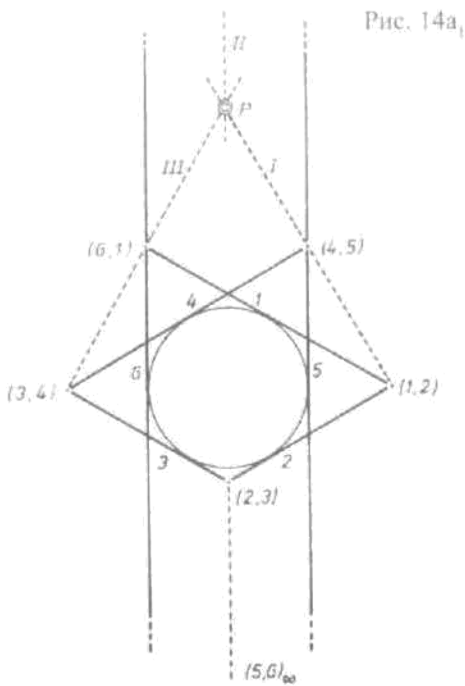


Рис. 14a₁

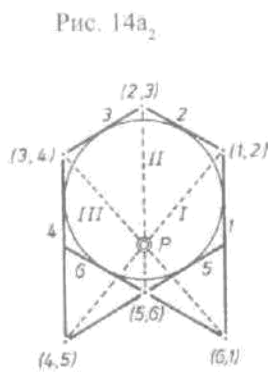


Рис. 14a₂

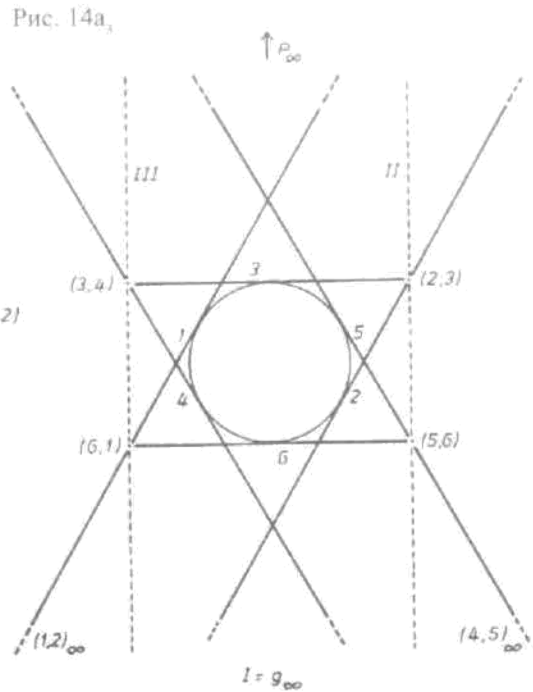


Рис. 14a₃

Шесть сторон можно пронумеровать и иначе. Тогда возникнут другие прямые I, II и III, проходящие через другую точку Бриансона. Если, нумеруя стороны, мы обходим эллипс, то точка Бриансона оказывается внутри (рис. 12a). Для шестисторонника существует всего 60 точек Бриансона.

Рис. 12b теперь также предстает в новом свете: при заданной нумерации прямая Паскаля — это прямая p . Если p вращается вокруг точки D' , то точка II пробегает прямую c , а точка III — прямую e . Пучки E и C проективно отображаются друг на друга, а точка F движется по эллипсу (рис. 7b).

В прошлой главе мы поставили вопрос: какие свойства окружности переносятся при центральном проектировании на конические сечения? Важнейшими инвариантами оказываются шестисторонники Бриансона и шестиугольники Паскаля. Каждый такой вписанный шестиугольник (описанный шестисторонник) сохраняет при центральном проектировании свойство вписанности (описанности) (только теперь уже в коническое сечение (или вокруг него)). Шестиугольник Паскаля, определенный на рисунке в Задании № 1 к настоящей главе, имеет свою прямую Паскаля. Это бесконечно удаленная прямая вертикальной плоскости. Теперь мы проектируем шестиугольник и окружность на горизонтальную плоскость, и в ней возникает эллипс с вписанным шестиугольником Паскаля (рис. 15).

В заключение данной главы приведем некоторые известные задачи на построение, решаемые с помощью шестиугольников и шестисторонников.



Рис. 14b₁

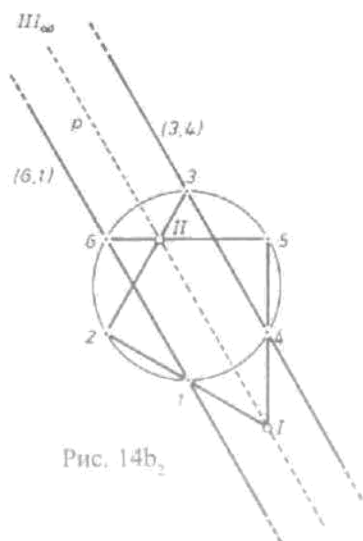


Рис. 14b₂

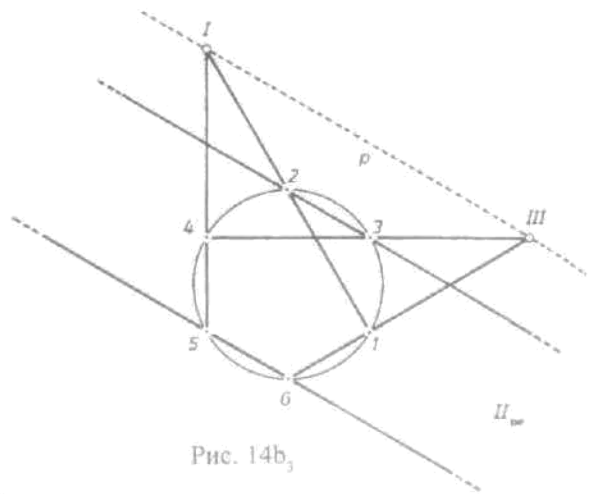


Рис. 14b₃

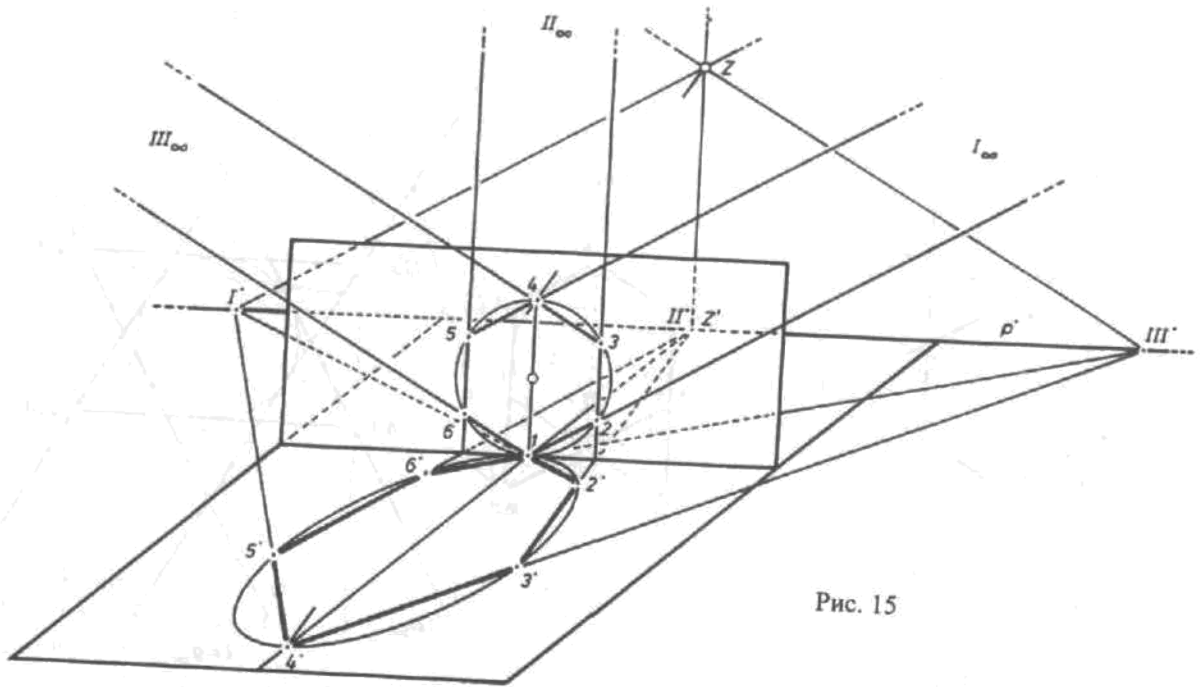


Рис. 15

1а. Пять прямых a, b, c, d, e определяют пучок прямых 2-го порядка (рис. 16а). На одной из прямых, скажем на прямой a , дана точка X . Через точку X можно провести кроме a еще одну прямую нашего пучка, т.е. еще одну касательную к вписанной кривой. Эту прямую и нужно теперь построить. Произвольным образом пронумеруем прямые, но так, чтобы прямая a и искомая прямая f получили последовательные номера (например, 1 и 2). Тогда X будет точкой пересечения этих прямых, т.е. точкой пересечения P . Теперь находим прямую Π как соединительную прямую для точек P и $(5, 6)$. Точкой пересечения прямой Π и прямой 3 будет точка $(2, 3)$. Искомая шестая прямая f — это прямая, которая соединяет X и $(2, 3)$.

2а. Каждая из пяти прямых a, b, c, d, e имеет с вписанной кривой одну точку касания. Как найти такую точку касания на прямой a ? Представим себе (рис. 16а), что касательная f движется вдоль кри-

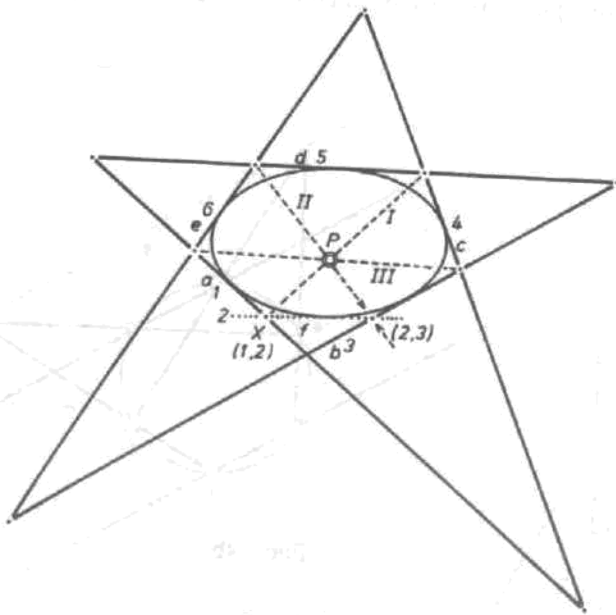


Рис. 16а

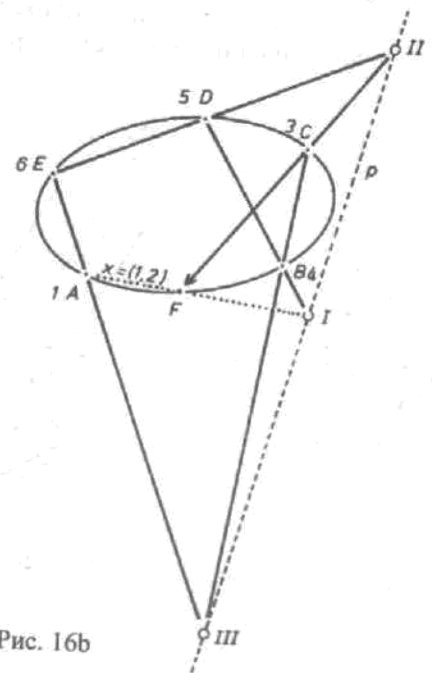


Рис. 16б

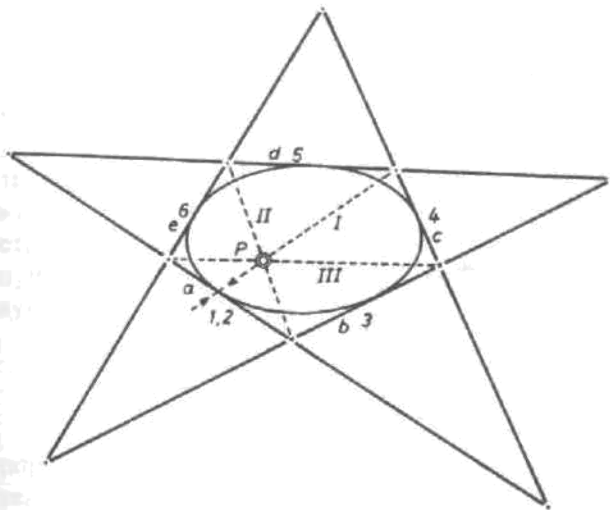


Рис. 17а

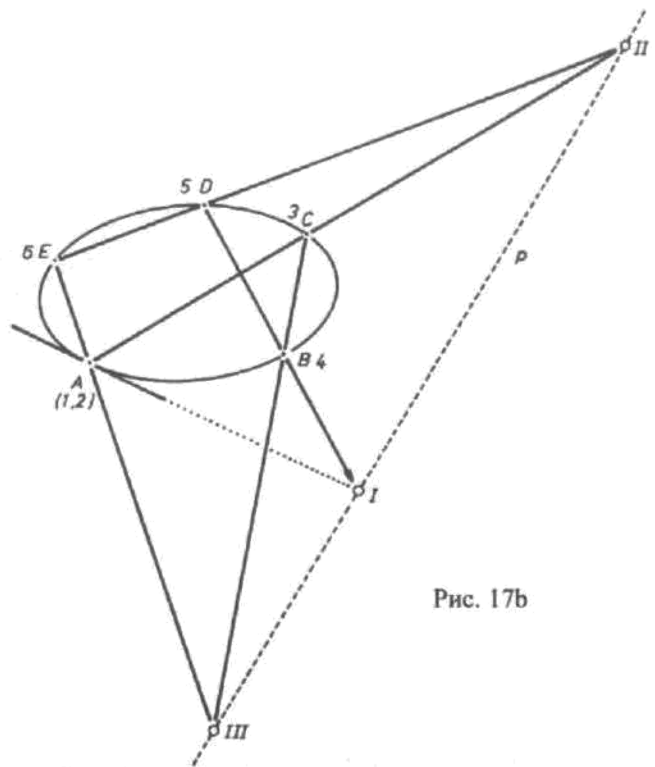


Рис. 17б

вой в направлении прямой a . Тогда точка $X = (1, 2)$ (точка пересечения прямых f и a) движется к точке касания прямой a и нашей кривой. Присвоим прямой a одновременно два номера — 1 и 2 (рис. 17а). В этом случае точка касания окажется точкой (1, 2). Остальные прямые пронумеруем произвольно. В любой нумерации можно построить соединительные прямые II и III. Они пересекаются в точке Брианшона (точке P). Прямая I соединяет точку P с точкой (4, 5), и ее пересечение с прямой a дает нам искомую точку касания (1, 2). Можно проследить все детали превращения фигуры на рис. 16а в фигуру на рис. 17а при приближении f к a . Отметим, что точка P при этом движется по прямой III.

Если внутри пятиконечной звезды a, b, c, d, e мы нарисуем маленькую звездочку, составленную из диагоналей, то мы получим 5 точек Брианшона (рис. 18а). Прямые, соединяющие эти точки с противоположными вершинами, пересекают стороны a, b, c, d, e в точках касания (вписанной кривой). В следующей главе мы покажем, что точки касания образуют ряд точек 2-го порядка. Пучок 2-го порядка вместе с рядом точек касания мы назовем *кривой 2-го порядка*.

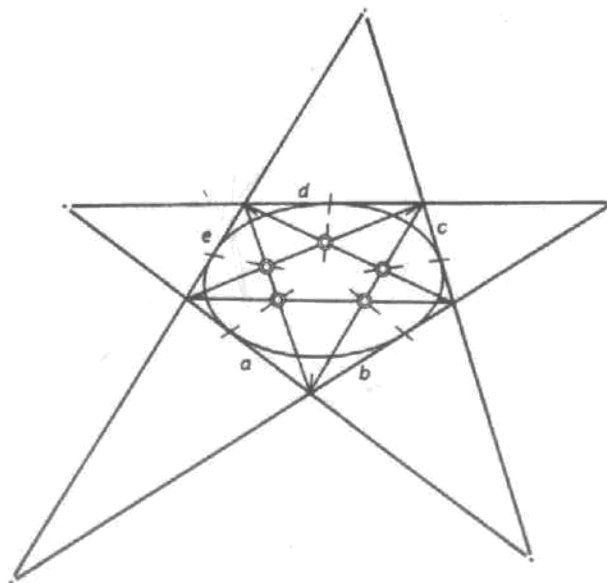


Рис. 18а

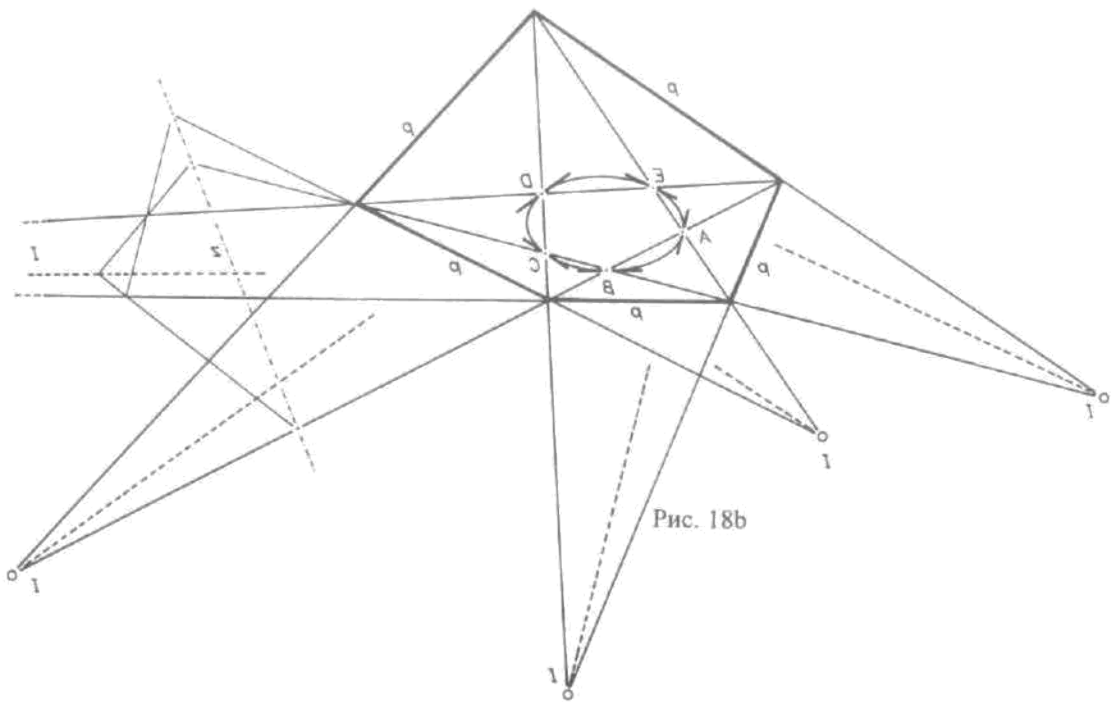


Рис. 18b

1b. Пять точек A, B, C, D, E определяют ряд точек 2-го порядка (рис. 16b). Пусть задана прямая x , проходящая через одну из этих точек, например через A . На прямой x кроме A есть еще одна точка нашего точечного ряда, вторая точка пересечения с описанной кривой. Нужно построить эту точку. Произвольно пронумеруем точки, но при этом точка A и искомая точка должны получить соседние номера (скажем, 1 и 2). Тогда прямая x — это их соединительная прямая (1, 2). Можно построить точки пересечения I и III, прямая, проходящая через них, является прямой Паскаля p . Точку II мы можем построить как точку пересечения p и прямой (5,6). Прямая, соединяющая II с точкой 3, — это прямая (2, 3), а искомая точка F является точкой пересечения этой прямой и прямой x .

2b. Через каждую из пяти точек A, B, C, D, E к описанной кривой можно провести одну касательную. Как ее построить (например, для точки A)? Представим себе, что точка F стремится вдоль кривой к точке A (рис. 16b). Тогда соединительная прямая $x = (1, 2)$ точек F и A стремится к касательной. Дадим точке A сразу два номера — 1 и 2 (рис. 17b), искомая касательная превратится в прямую (1, 2). Все остальные точки пронумеруем произвольно. Построим точки пересечения II и III: их соединительная прямая — это прямая Паскаля p . I — это точка пересечения p с (4, 5), и вместе с точкой A она задает

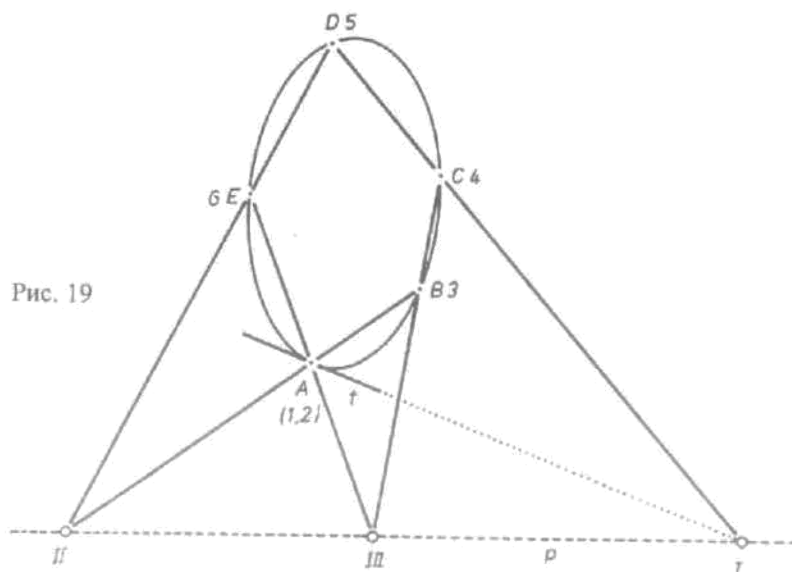


Рис. 19

искомую касательную (1, 2). Можно проследить все детали превращения рис. 16b в рис. 17b при приближении F к A . Отметим, что прямая Паскаля при этом вращается вокруг точки III.

На рис. 19 построение касательной в точке A начато с иной нумерации. Вся конструкция при этом совершенно прозрачна. Теперь проанализируем рис. 18b (двойственный рис. 18a). На основании пяти точек строится пятисторонник и пятиконечная звезда. Прямые, соединяющие пять вершин звезды, задают пять прямых Паскаля (p). Точки пересечения каждой прямой Паскаля с противоположной прямой звездного луча играют роль точки I. Если эти точки соединить с соответствующими точками кривой, то мы получим касательные. Одна из точек I недоступна, с ней следует соединить точку B . Эта прямая строится с помощью конфигурации Дезарга (ось z , центр I). Касательные к описанной кривой образуют пучок 2-го порядка. Этот пучок касательных вместе с точечным рядом сплавляются в описанную кривую!

Приложение

Перечислим важные свойства проективного отображения: оно взаимно однозначно, сохраняет порядок (порядок элементов не меняется, нужно только в правильном направлении пройти последовательность образующих элементов), гармонические четверки переходят в гармонические четверки.

Если нужно проективно отобразить точечный ряд a в точечный ряд c (рис. 20), то следует выбрать произвольную тройку точек A_1, A_2, A_3 ряда a и поставить им в соответствие произвольную тройку точек C_1, C_2, C_3 ряда c . Существует бесконечное число пар перспективных отображений, переводящих A_1 в C_1 , A_2 в C_2 и A_3 в C_3 . Например, соединим A_1 с C_1 и выберем на получившейся прямой g два произвольных центра Z_1 и Z_2 . Точки пересечения соответствующих прямых, проходящих через Z_1 и Z_2 , однозначно определяют ряд b . Как бы мы ни выбрали центры Z_1 и Z_2 , два последовательных перспективных отображения ставят в соответствие четвертой точке A_4 на a все ту же точку C_4 на c . Проведите построение точки C_4 другими центрами, и вы в этом убедитесь!

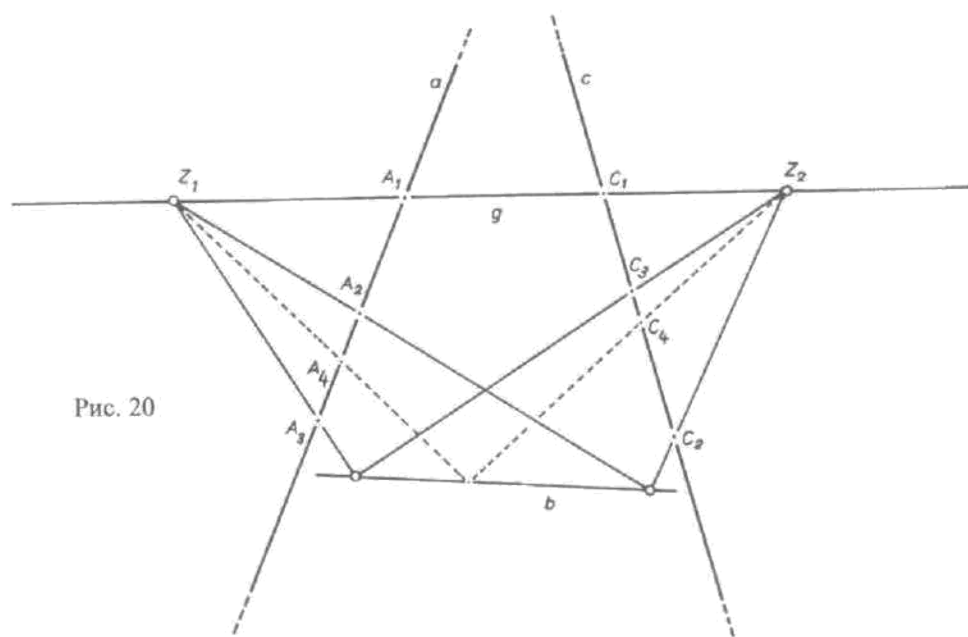


Рис. 20

Тот факт, что проективное преобразование задается *тремя* парами соответствующих элементов, называется *основной теоремой проективной геометрии*. При этом не играет роли, композицией каких двух перспективных преобразований оно в конечном итоге оказывается. Именно в силу этого мы имели право на рис. 9a и 9b переходить от одного проективного преобразования к другому. Строгое доказательство основной теоремы проективной геометрии вы найдете, например, в книге Луиса Лохер-Эрнста «Проективная геометрия».

25. Полюс и поляра — гармоническое отражение кривых 2-го порядка

С кривыми 2-го порядка связано *парное соответствие*¹⁸ между точками и прямыми на плоскости. Если взять в качестве центра и оси гармонического отражения такую пару, состоящую из точки и прямой, то кривая отразится в себя.

Поясним сказанное на примере окружности: каждый диаметр d окружности является ее осью симметрии (рис. 1). Это означает, что при гармоническом отражении с осью d и центром D_∞ (D_∞ расположена в направлении, перпендикулярном d) точки слева и точки справа меняются местами. Таким образом, d и D_∞ образуют пару. Но в равной мере такую же пару образует всякий диаметр и бесконечно удаленная точка, лежащая в перпендикулярном направлении к нему.

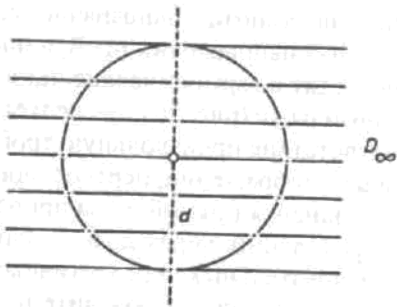


Рис. 1

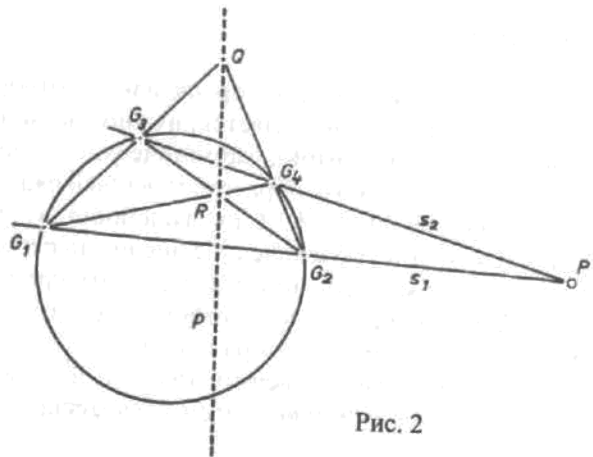


Рис. 2

На самом деле гармоническое отражение окружности можно построить с помощью каждой точки P (исключая точки самой окружности) (рис. 2). Вопрос только состоит в том, как найти соответствующую P ось? Проведем через P две произвольные секущие s_1 и s_2 . Они пересекают окружность в четырех точках. Пусть эти точки будут выбраны в качестве вершин *полного четырехугольника*. Тогда промежуточная сторона $p = (P, Q)$ и будет соответствующей точкой P осью отражения. Из рисунка очевидно, что при гармоническом отражении с центром P и осью p как точки G_1 и G_2 , так и G_3 с G_4 меняются местами.

Проведем через P две другие прямые — s'_1 и s'_2 (рис. 3). Мы обнаруживаем, что промежуточные вершины Q' и R' нового четырехугольника лежат на той же прямой p первого четырехугольника. Получается, что прямая p не зависит от выбора двух секущих¹⁹. Через какую бы точку окружности мы ни

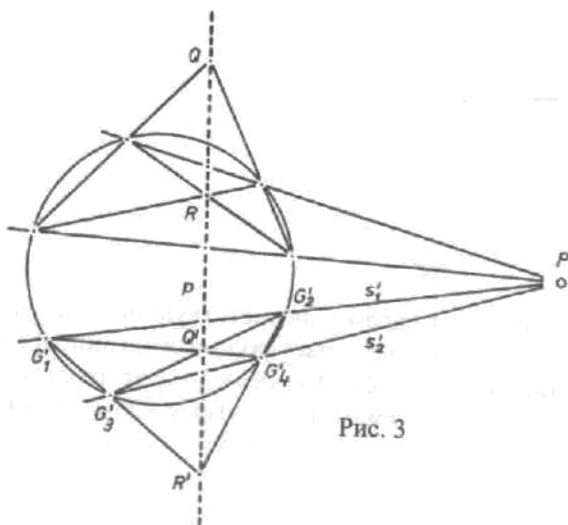


Рис. 3

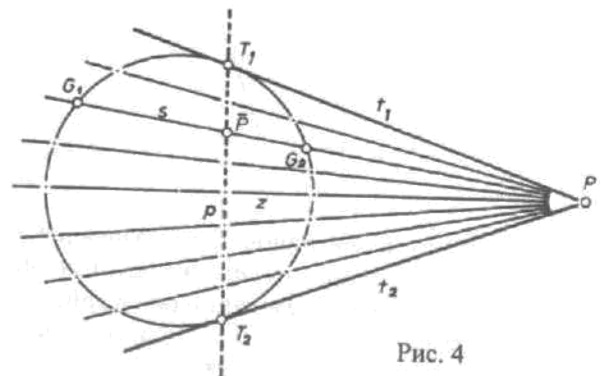


Рис. 4

¹⁸ Такое соответствие также называют *полярной системой*. — Прим. пер.

¹⁹ Строгое доказательство можно найти в главе II,5 «Проективной геометрии» Луиса Лохер-Эрнста.

провели секущую, она пересечет окружность во второй точке, соответствующей первой при гармоническом отражении. Это значит, что на каждой прямой, проходящей через P , четыре точки (PP, G_1G_2) образуют гармоническую четверку (рис. 4). Если поворачивать прямую s вокруг точки P по направлению к касательной t_1 , то точки G_1 и G_2 будут двигаться по окружности по направлению к точке T_1 (точке касания прямой t_1), где и совпадут. T_1 отображается сама в себя, как и T_2 . Центр P и ось p гармонического отражения называются *полюсом* и *полярной*. P называется также *полюсом p* , а p — *полярной P* .

Парное соответствие точек на окружности устанавливается гармоническим отражением относительно полюса и полярной и называется *гиперболической инволюцией* на окружности. T_1 и T_2 являются двойными точками этой инволюции.

Зачастую полярная внешней точки конструируется с помощью касательных: она является соединительной прямой двух точек касания. Эта конструкция очень удобна, мы будем часто к ней прибегать. Но важно не забывать о содержательной стороне происходящего: окружность при гармоническом отражении относительно полюса и полярной отображается в себя!

А можно ли построить полярную для точки R , находящейся *внутри* окружности? Если да, то уж во всяком случае не при помощи конструкции с касательными! Однако мы можем прибегнуть к уже испытанному средству, а именно провести через R две произвольные прямые s_1 и s_2 (рис. 5) и восстановить по точкам пересечения полный четырехугольник. Для внутренней точки R всякий построенный таким образом полный четырехугольник также порождает одну и ту же промежуточную сторону r . Мы убеждаемся, что окружность снова переходит в себя при гармоническом отражении относительно R и r .

Если мы нарисуем все три промежуточные стороны полного четырехугольника (рис. 6), то мы обнаружим, что каждая из них может взять на себя роль полярной по отношению к противоположной промежуточной вершине. Одна из промежуточных вершин всегда находится внутри круга, а две — вовне. Треугольник, образованный тремя промежуточными вершинами, мы назовем *полярным треугольником* окружности.

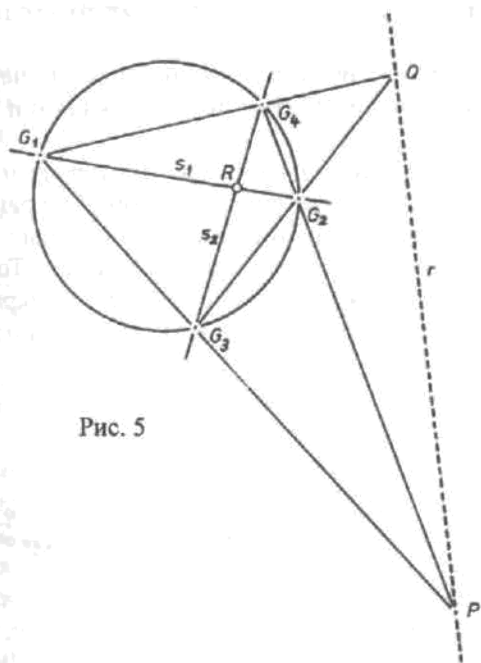


Рис. 5

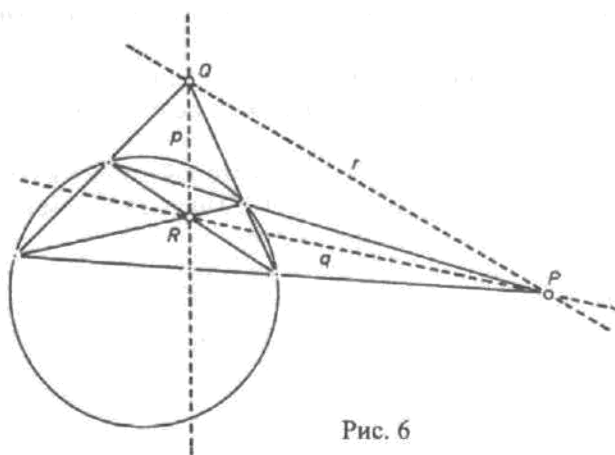


Рис. 6

А как быть с полярной для точки, лежащей на окружности? Рассмотрим рис. 4. Если P приближается по диаметру z к окружности, то полярная движется ей навстречу, оставаясь всегда перпендикулярной z . В пределе P, T_1 и T_2 склеиваются в одну точку, лежащую на окружности, а полярная превращается в *касательную* к этой точке. Итак, полярные точек окружности — это касательные. Если полюс и полярная инцидентны, то гармоническое отражение вырождается. Кстати, если точка P уходит в бесконечность, то рис. 4 превращается в рис. 1.

Можно ли построить полюс P по заданной прямой p (полярной)? Если p пересекает окружность, то в точках пересечения строятся касательные, точка пересечения которых и даст нам полюс прямой p . Иначе (рис. 7) следует выбрать на p две произвольные точки S_1 и S_2 и провести через них касательные к окружности. Эти четыре касательные станут основными прямыми *полного четырехсторонника*. Иско-

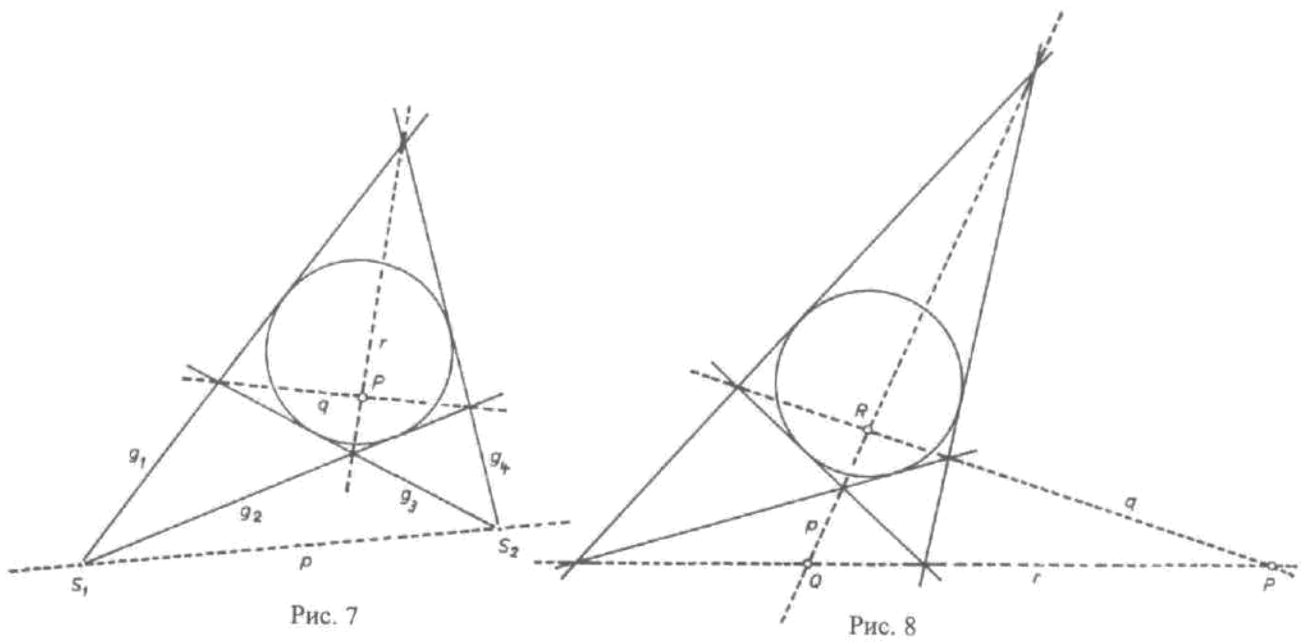


Рис. 7

Рис. 8

мый полюс — промежуточная вершина P . Она не зависит от выбора точек S_1 и S_2 . Если p пересекает окружность, то и в этом случае полюс также можно построить с помощью полного четырехсторонника. Промежуточный треугольник снова называется полярным (рис. 8).

Все сказанное о полюсе и поляре без всяких изменений переносится на эллипс, параболу и гиперболу. На рис. 9 и 10 в эллипс и гиперболу вписаны полные четырехугольники с полярными треугольниками.

Снова ограничим наши рассуждения полюсом и полярной на окружности. Выполним ряд чертежей, на которых поляры строятся уже не для отдельных точек, а для целых точечных рядов (1-го и 2-го порядка).

Окружность, относительно которой строятся поляры, будет далее называться *поляризатором* или *поляризующей окружностью* (р.К.). Но прежде чем приступить к примерам, продемонстрируем рациональный способ построения поляры для внешней к окружности точки. Напомним, что мы делали это, проводя через такую точку пару касательных, и затем соединяли точки касания прямой (рис. 11). Точки касания лежат на окружности диаметра PZ . Значит, для их нахождения достаточно пересечь поляризатор двумя короткими дугами нашей вспомогательной окружности. Далее все поляры будут строиться по этой методике.

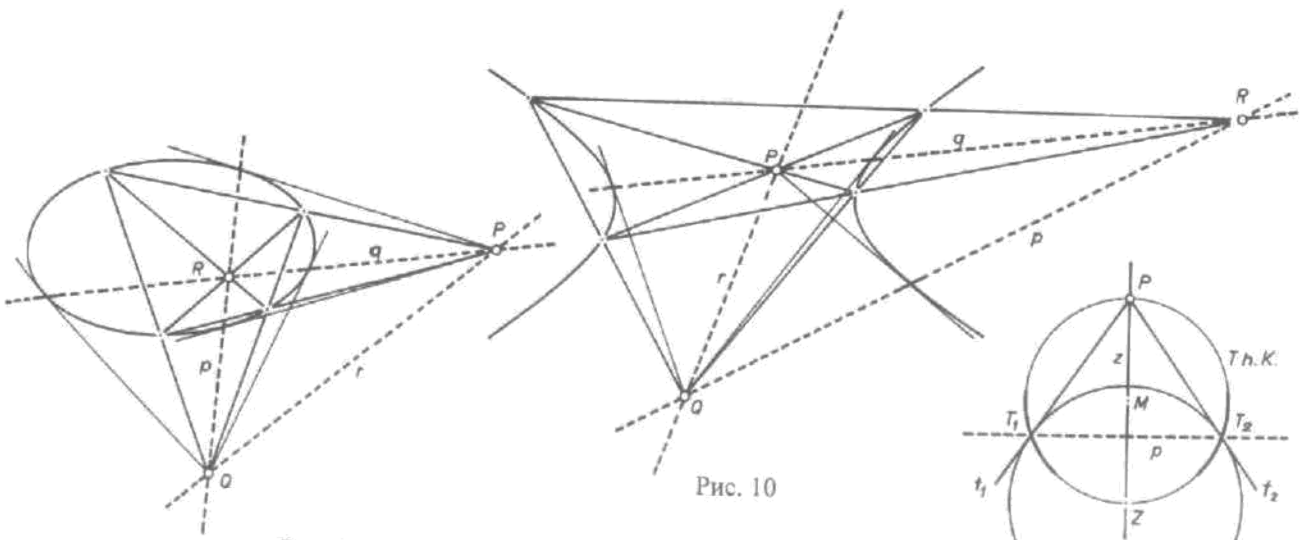


Рис. 9

Рис. 10

Рис. 11

Пример 1 (рис. 12): Вокруг поляризатора (р.К.) нарисуем еще одну concentрическую окружность K и выберем на ней след P_1, P_2, P_3, \dots из равномерно (или неравномерно) распределенных точек.

Для каждой из этих точек мы построим полярю. Соединим точки с Z и разделим получившиеся отрезки пополам. Середины лежат на окружности K_M , радиус которой вполучину меньше радиуса K . Эти середины являются центрами вспомогательных окружностей, которые мы, однако, полностью не изображаем, а рисуем лишь небольшие дуги, пересекающие поляризатор. Соединив соответствующие точки пересечения, мы получаем поляры p_1, p_2, p_3, \dots . Они образуют венчик касательных вокруг четвертой concentрической окружности — \bar{K} . Окружности K , состоящей из точек, соответствует окружность \bar{K} , состоящая из касательных.

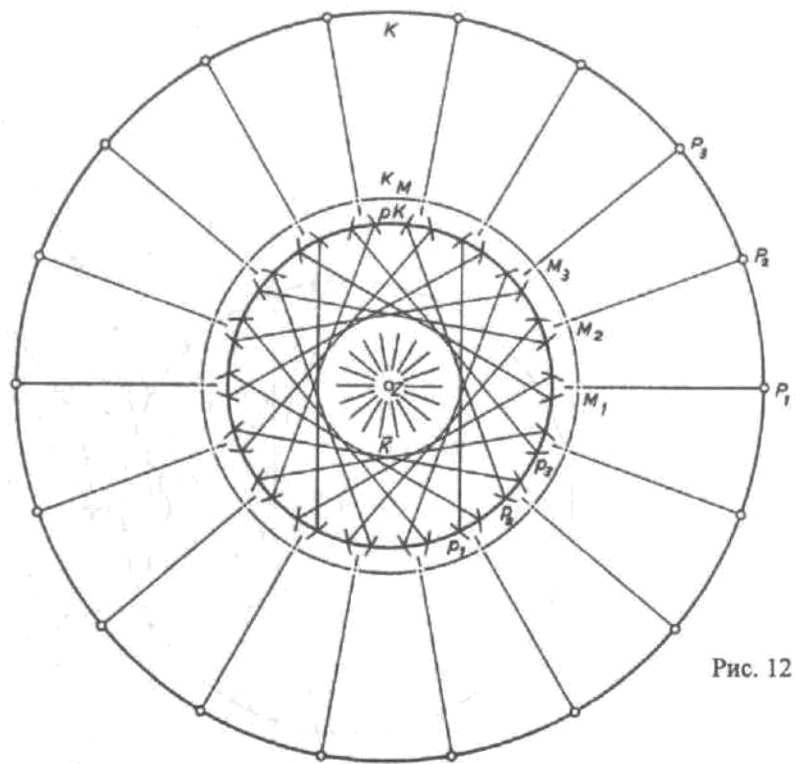


Рис. 12

Пример 2 (рис. 13): Окружность K объемлет $p.K.$, но их центры не совпадают. Соединительные отрезки ZP_1, ZP_2, ZP_3, \dots имеют различную длину, но их середины снова лежат на окружности (K_M), гомотетичной (с центром Z и с коэффициентом гомотетии $1/2$) нашей окружности K . Центр окружности K_M является серединой отрезка ZZ_K . Его радиус в два раза меньше радиуса K . Поляры p_1, p_2, p_3, \dots огибают в этом случае уже не окружность, а эллипс! (см. Задание 1 к настоящей главе).

Пример 3 (Задание № 2 к настоящей главе): Окружности K и $p.K.$ расположены, как на рис. 14. K_M снова гомотетична K . Рисунок становится более понятным, если поляры продлены на весь лист.

Всегда ли при поляризации из кругового ряда точек возникает пучок прямых 2-го порядка? Мы ответим на этот вопрос, когда узнаем, каков полярный образ точечного ряда 1-го порядка.

Поляризуем точечный ряд из Задания № 3 к настоящей главе. Середины соединительных отрезков $\dots ZP_{-1}, ZP_0, ZP_1, \dots$ лежат на параллельной ряду прямой на половинном расстоянии от Z до g . Чертеж должен быть максимально точным! (рис. 15).

Опыт показывает: точечный ряд 1-го порядка, поляризуясь, превращается в пучок прямых 1-го порядка. Все поляры $\dots p_{-1}, p_0, p_1, \dots$ проходят через одну и ту же точку G .

В чем здесь дело? Чтобы ответить на этот вопрос, исследуем, на каком расстоянии от Z находится полюс и поляр (рис. 16). Из прямоугольного треугольника ZPT_1 получаем:

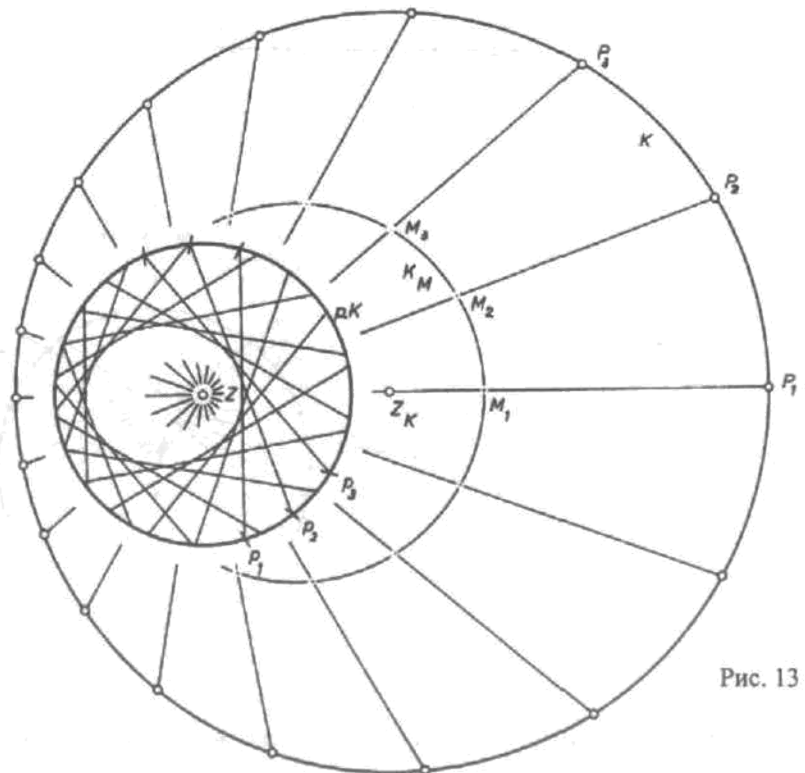


Рис. 13

$$Z\bar{P} \cdot ZP = r^2,^{20}$$

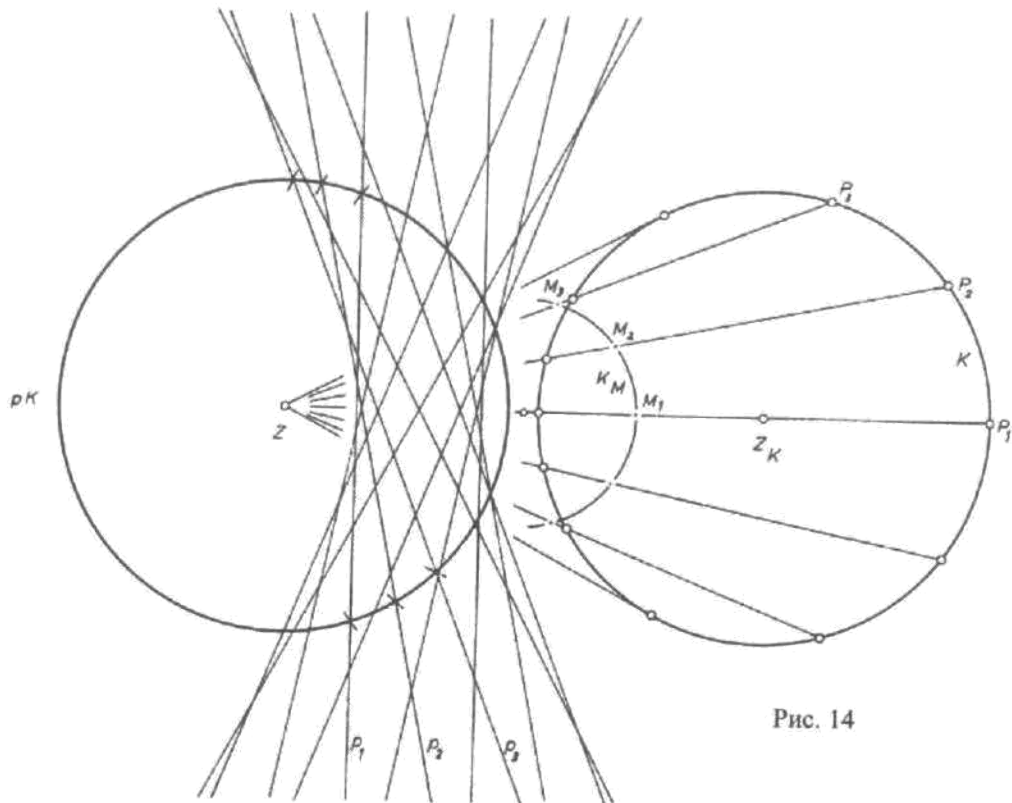


Рис. 14

Иначе говоря, прямоугольник (произведение), составленный из расстояний от полюса и поляры до центра, равновелик квадрату радиуса поляризатора.

Кроме этого справедливо следующее утверждение: поляра при поляризации относительно окружности перпендикулярна соединительной прямой полюс — центр.

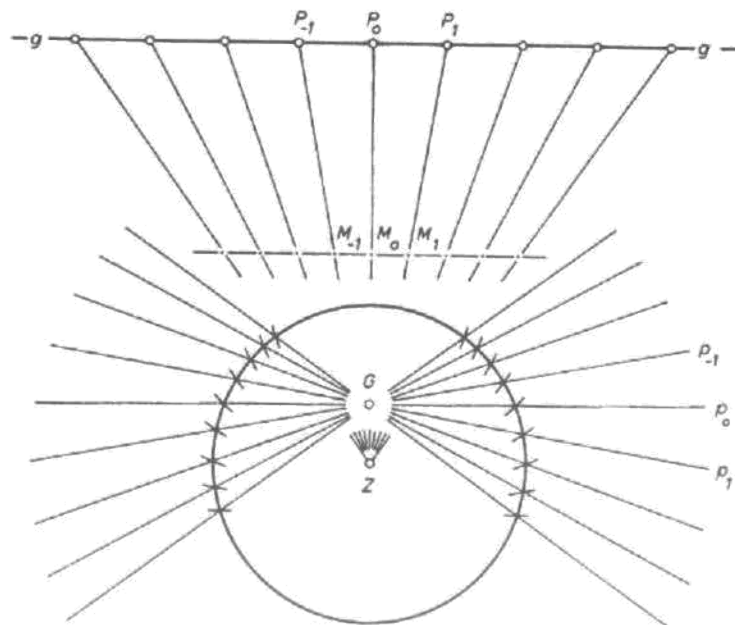


Рис. 15

²⁰ В школьных учебниках по геометрии это утверждение известно как теорема об отрезках касательной и секущей. — Прим. пер.

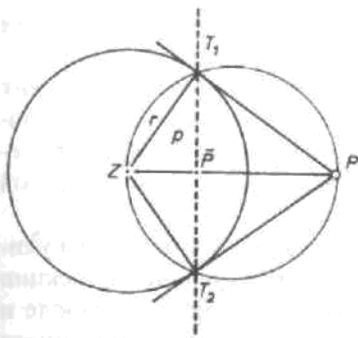


Рис. 16

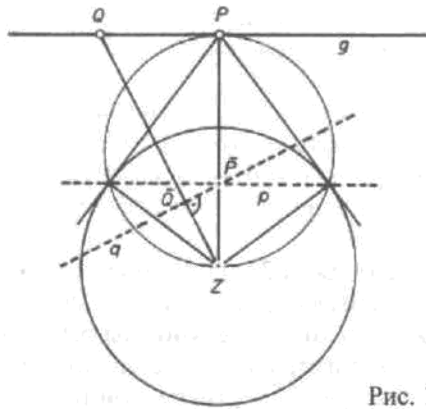


Рис. 17

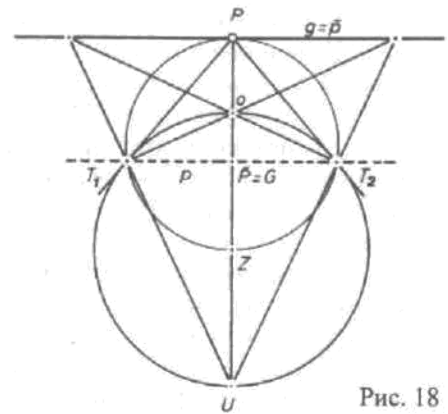


Рис. 18

Мы выбираем на поляре g (рис. 17) кроме точки P , чья поляра p уже построена, произвольную точку Q и проводим через точку P перпендикуляр к прямой QZ . Является ли данная прямая полярой к точке Q ? Да, поскольку из подобия треугольников ZPQ и $Z\bar{Q}\bar{P}$ следует, что:

$$\frac{Z\bar{Q}}{Z\bar{P}} = \frac{ZP}{ZQ}, \text{ т.е. } Z\bar{Q} \cdot ZQ = ZP \cdot Z\bar{P} = r^2$$

$Z\bar{Q}$ и ZQ удовлетворяют, таким образом, правилу расстояний. Когда точка Q движется по прямой g , поляра вращается вокруг точки \bar{P} .

Из рис. 18 следует, что точка \bar{P} является полюсом прямой g . (Обратите внимание на полный четырехугольник T_1T_2OU , в котором \bar{P} является промежуточной вершиной, а g — противоположной промежуточной стороной.) \bar{P} поэтому можно также назвать G .

Итак (основная теорема теории поляр): *Полярным образом точечного ряда 1-го порядка является пучок прямых 1-го порядка, проходящий через полюс G прямой g . Обратное: соответствующий точечный ряд является полярным образом пучка прямых.*

Основная теорема теории поляр справедлива не только для окружности, но и для любой кривой 2-го порядка. Однако в этом случае доказательство не так тривиально.

Из рис. 18 можно вывести простую конструкцию поляры g внутренней точки G : проведем в точке G перпендикуляр к GZ . В точках пересечения этого перпендикуляра с окружностью восстановим касательные. Перпендикуляр к прямой GZ в точке пересечения касательных и будет искомым полярой g .

Из основной теоремы теории поляр следует: полярный образ точечного ряда 2-го порядка является пучком прямых 2-го порядка, и наоборот. Дело в том, что проективность двух пучков A и B (рис. 6б гл. 24) влечет за собой при поляризации проективность двух точечных рядов a и b (рис. 6а гл. 24). Вершины пятиконечной звезды при поляризации переходят в лучи, и наоборот. Шестиугольник Паскаля превращается в шестисторонник Бриансона, и наоборот.

На рис. 19 поляризатор является вписанной в пятиконечную звезду a, b, c, d, e окружностью. Тогда стороны и вершины внешней звезды полярны вершинам и сторонам внутренней звезды. Прямая Паскаля для внутреннего шестиугольника оказывается полярой точки Бриансона для внешнего шестисторонника (прямая p перпендикулярна радиусу, проведенному к P).

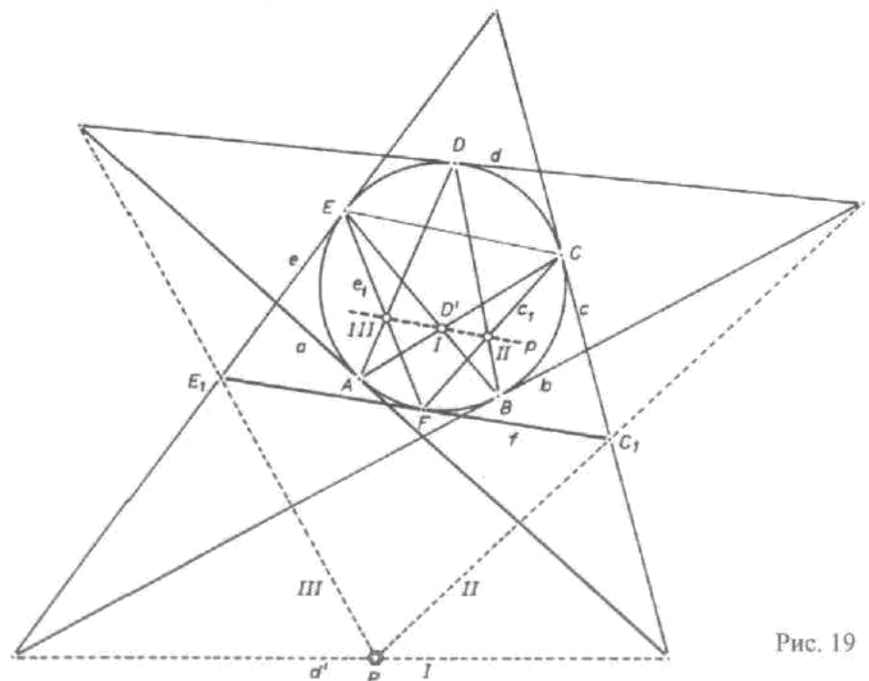


Рис. 19

Вообще, точки и прямые шестисторонника Бриансона и шестиугольника Паскаля оказываются взаимно полюсами и полярными. Если точка P пробегает точечный ряд d' , то полярная p проворачивается в пучке прямых D' , а f и F движутся по кругу.

Вся структура главы 24 убеждает нас в том, что шестисторонник Бриансона и шестиугольник Паскаля двойственны друг другу. Двойственность — это качественное отношение. Благодаря поляризации относительно окружности (и любого другого конического сечения) это отношение можно конкретизировать: каждой точке и каждой прямой одной фигуры соответствуют полярная и полюс на другой фигуре.

Если мы теперь вспомним рис. 2, 5 и 6 главы 23 (центральная проекция окружности), то мы увидим, что обычные осевые симметрии относительно диаметра окружности при центральной проекции превращаются в гармонические отображения относительно полюса и полярных в эллипсе, параболе и гиперболе. Квадрат при этом можно рассматривать в качестве полного четырехсторонника, описанного вокруг окружности. Бесконечно удаленная прямая вертикальной плоскости играет роль промежуточной стороны. Квадраты проектируются в полные четырехугольники, описанные вокруг конического сечения.

Приложение. Непрерывное превращение полярных объектов

Луис Лохер-Эрнст поставил задачу непрерывного превращения полярных фигур друг в друга. Как, например, постепенно превратить точечный ряд $\dots P_{-1}, P_0, P_1, \dots$ на прямой g (рис. 15) в пучок $\dots p_{-1}, p_0, p_1, \dots$ с центром G . В своих статьях и лекциях Лохер-Эрнст²¹ описал метаморфозу одного объекта в другой, причем такую, что ее можно выполнить геометрически:

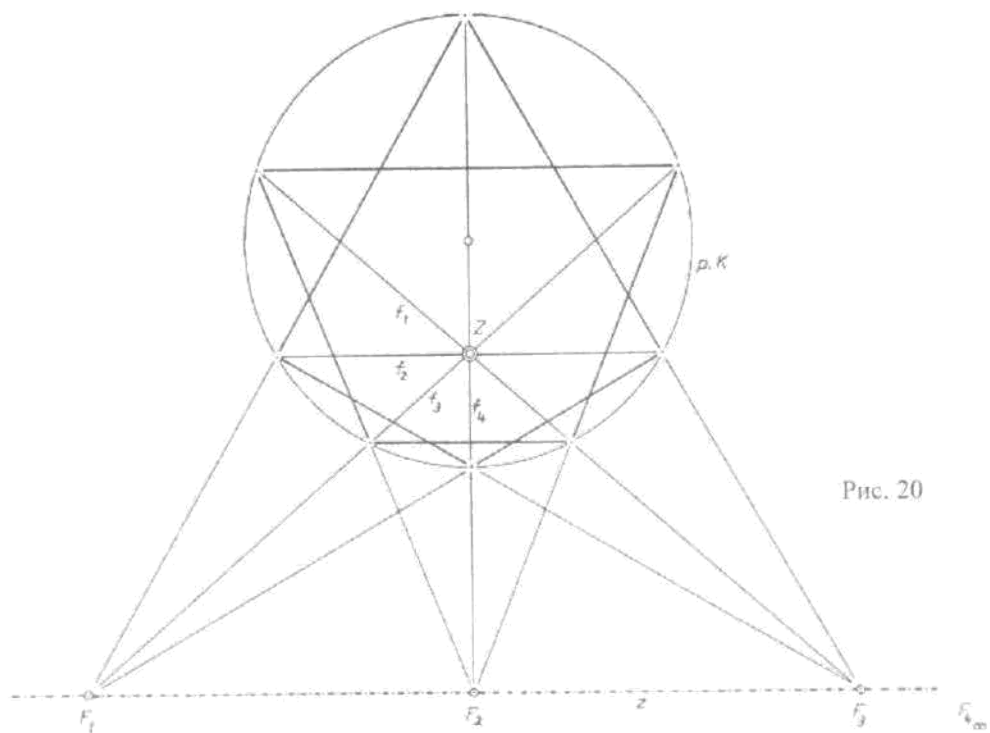


Рис. 20

Выберем в поляризаторе р.к. (далее нуль-сфера) точку Z и построим ее полярную с помощью двух полных четырехугольников, в которых Z играет роль промежуточной вершины (рис. 20). Четырехугольники образуют внутри окружности восьмиконечную звезду. Четыре ее диаметра являются полярными одной бесконечно удаленной точки и трех конечных точек на прямой z . Теперь подвергнем окружность и восьмиконечную звезду перспективной коллинеации с центром Z и осью z (рис. 21). Пусть самая верхняя точка O играет роль инициатора и движется из положения O_0 в положение O_1 . Остальные точки

²⁰ Луис Лохер-Эрнст «Геометрические метаморфозы».

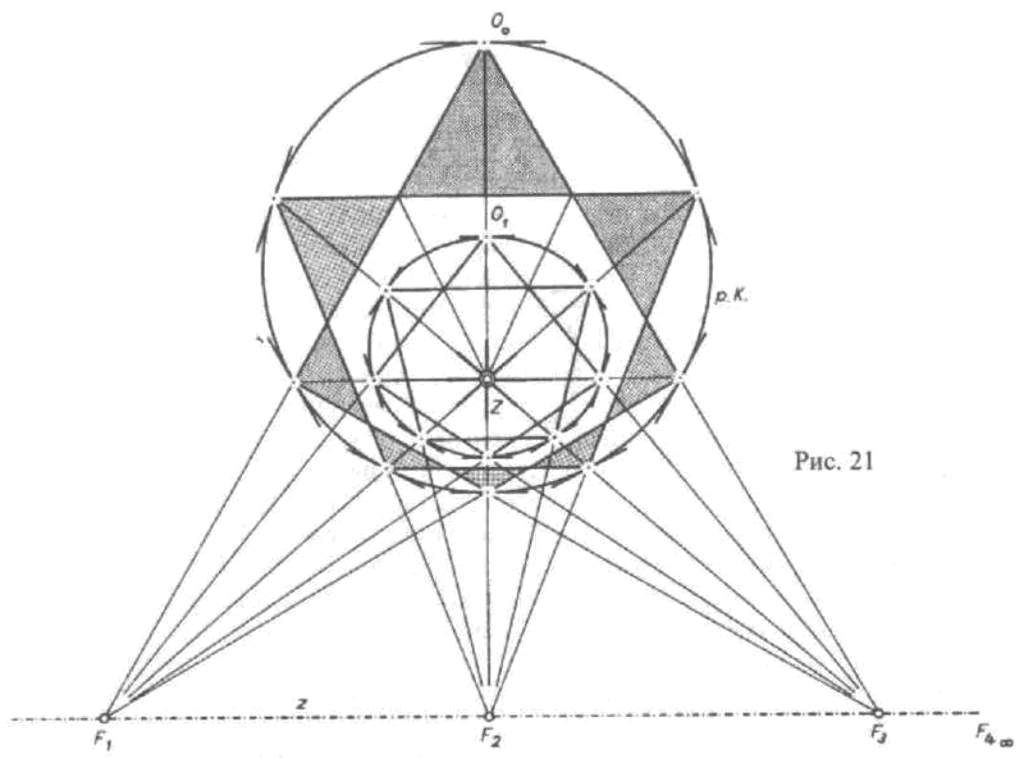


Рис. 21

и прямые восьмиконечной звезды следуют за инициатором согласно законам перспективной коллинеации. Точки на прямой z неподвижны. Восьмиконечная звезда сжимается по направлению к центру Z ; описанная окружность также сжимается и превращается в эллипс. Теперь направим наше внимание на движение линейных элементов окружности. Поскольку диаметры восьмиконечной звезды являются полярами неподвижных точек, касательные в концах этих диаметров проходят через эти неподвижные точки и во время сжатия вращаются вокруг них. Если сжатие доходит до своего крайнего предела,

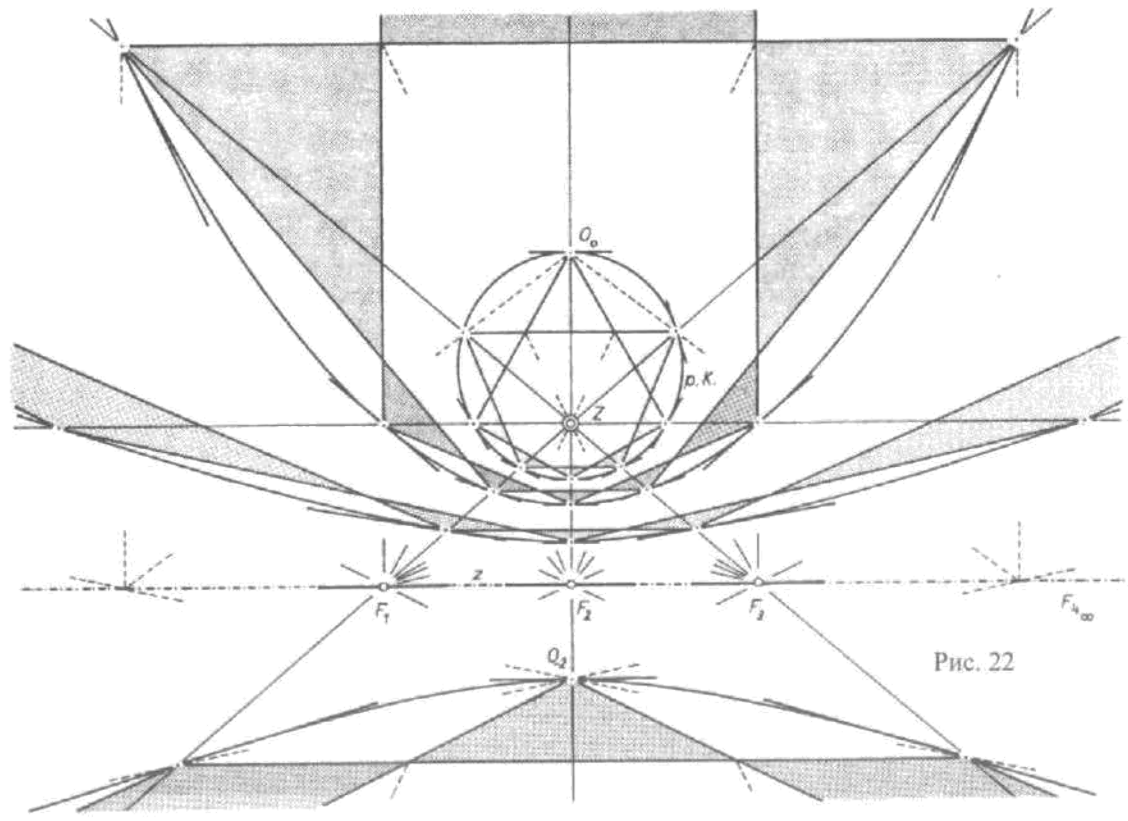


Рис. 22

линейные элементы окружности превращаются в «звездочку» в точке Z . Все точки слипаются в Z , а две любые диаметрально противоположные касательные соединяются в единую прямую, проходящую через Z (Задание № 5 к настоящей главе).

Движение может происходить и в противоположном направлении (рис. 22). Точка O при этом переходит из положения O_0 вверх, в бесконечно удаленную точку (положение O_1). Восьмиконечная звезда расширяется и касается своей вершиной бесконечно удаленной прямой. Описанная окружность превращается в параболу. Если точка O проходит через бесконечно удаленную точку вплоть до положения O_2 , то восьмиконечная звезда переступает через бесконечно удаленную прямую и вписывается в гиперболу. Расширение (как и сжатие) можно довести до логического конца: в этом случае все восемь сторон совпадут с прямой z . Что произойдет с линейными элементами описанной кривой? Они превратятся в точечный ряд z ! Все касательные совпадут с прямой z , и две любые диаметрально противоположные точки превратятся в одну точку на прямой z (Задание № 6 к настоящей главе).

Можно начать преобразование с точечного ряда z и закончить его в пучке прямых Z (или наоборот). Перспективная коллинеация линейных элементов порождает семейство соответствий между полярными элементами точечного ряда z и пучка Z . Точечный ряд можно также рассматривать в качестве до предела *выпрямленной* кривой, тогда как пучок вызывает аналогию с кривой до предела *искривленной*. Между этими двумя полярностями и совершается метаморфоза. Мы продемонстрировали ее для случая, когда носителем пучка является *внутренняя* точка; однако в работах Луиса Лохер-Эрнста содержится соответствующее описание и для *внешней* точки. Кроме того, показано, что метаморфозы между всеми парами полюсов и поляр могут быть согласованы друг с другом так, чтобы они одновременно начинались, одновременно проходили через нуль-сферу и одновременно заканчивались. При этом каждая пара полярных фигур (например, точечная окружность и «линейная» гипербола на рис. 14) непрерывно переводятся друг в друга.

Для тех, кто знаком с неевклидовой геометрией: имеет смысл рассмотреть метаморфозу в рамках гиперболической и полярно-гиперболической геометрии; нуль-сфера при этом является граничной окружностью. Описанные вокруг восьмиконечной звезды кривые в каждый момент являются собственными гиперболическими (рис. 21) или полярно-гиперболическими (рис. 22) окружностями. (См. также главу «Окружность в гиперболической и полярно-гиперболической геометрии» в брошюре автора «Созерцательная геометрия».)

26. Внутреннее и внешнее – большое и малое Евклидова и полярно-евклидова геометрия

Для нас самоочевидно, что окружность отграничивает в точечном поле внутреннюю и внешнюю области. При этом на плоскости невозможно найти такой путь, который привел бы нас из точки внутренней области к точке внешней области без хотя бы однократного пересечения границы. Из внешней точки к окружности можно провести касательные, из внутренней точки этого сделать невозможно.

В настоящей главе мы проследим за тем, как при поляризации отображаются точки внутренней и точки внешней области. Окружность будет при этом играть роль поляризатора $p.K$. Она отображается при поляризации в себя: каждая точка — в свою касательную, и наоборот: т.е. ряд 2-го порядка точек окружности и пучок 2-го порядка ее касательных отображаются друг в друга.

Внутри поляризатора рассмотрим последовательность уменьшающихся окружностей (рис. 1). Радиус поляризующей окружности мы примем за единицу e ; будем считать, что окружности имеют радиусы $e/2, e/3, e/4, \dots$ и так далее. Эти точечные окружности отобразятся в последовательность линейчатых окружностей (состоящих из прямых) с радиусами $2e, 3e, 4e \dots$ и так далее; действительно, произведение радиуса первой внутренней окружности и первой внешней окружности дает $e/2 \cdot 2e = e^2$. Эти радиусы удовлетворяют закону расстояний (остальные пары окружностей, разумеется, также: действительно: $e/3 \cdot 3e = e^2, \dots$ и так далее).

Последовательность внутренних окружностей сжимается к центру Z . Полярно: последовательность внешних окружностей расширяется в направлении к бесконечно удаленной прямой z . Z лежит внутри всех точечных окружностей, z — внутри всех линейчатых. Если мысленно провести этот процесс в обратном направлении и заставить точечные окружности снова расти от точки Z в направлении поляризатора, то линейчатые окружности будут «расти» от прямой z — бесконечно удаленной прямой — в направлении поляризующей окружности. Так что же является полярным к точечной внутренней поляризующей окружности? Совокупность всех прямых (назовем их *внутренними* прямыми), которые проходят вне поляризующего круга. Какая из линейчатых окружностей имеет большую внутреннюю область? Чем больше радиус такой окружности в обычном понимании этого слова, тем меньше ее «внутренняя» (заполненная прямыми) область. Если обычный радиус становится бесконечно большим, то внутренность сжимается до одной-единственной бесконечно удаленной прямой!

Когда мы переходим от точечной окружности к линейчатой, мы должны полностью перестроить свой взгляд.

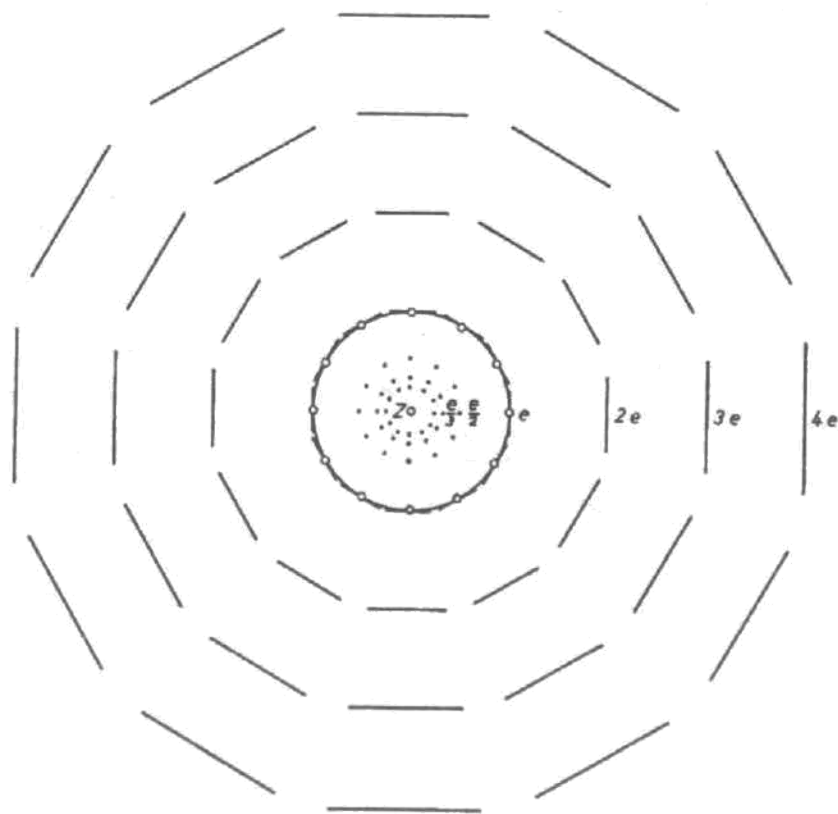


Рис. 1

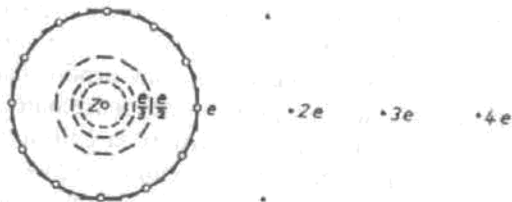


Рис. 2

Теперь произведем обратное рассмотрение. Возьмем последовательность точечных окружностей с радиусами $2e, 3e, 4e, \dots$ вне поляризатора (рис. 2). Им полярны линейчатые окружности с радиусами $e/2, e/3, e/4, \dots$. Точечные окружности растут вовне. Совершенно в том же смысле линейчатые окружности растут внутрь. Когда радиус точечной окружности становится бесконечно большим, ее точки покрывают бесконечно удаленную прямую дважды, а ее внутренняя область заполняет всю точечную область плоскости. В полярном примере происходит все то же самое: когда обычный радиус линейчатой окружности становится равным нулю, прямые пучка дважды покрывают пучок Z , а внутренняя область, состоящая из прямых, заполняет собой все поле прямых данной плоскости.

Итак, точечной области, лежащей вне поляризатора, соответствует совокупность прямых, пересекающих окружность. Мы назовем их внешними прямыми. Так же, как из внешней точки можно провести к окружности две касательные, так и внешняя прямая пересекает окружность в двух точках. Внутренние точки не позволяют провести через них касательные — внутренние прямые не имеют с окружностью точек пересечения.

Когда мы прочерчиваем циркулем окружность и рассматриваем получившуюся линию, перед нами как бы предстает образ всех ее точек. Иногда мы строим несколько касательных. Но исчерпывающее внутреннее представление об окружности мы получаем, только мысленно дополнив ряд ее точек пол-



Рис. 3а

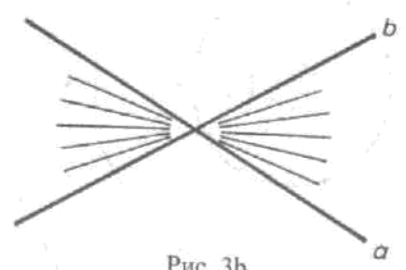


Рис. 3б



Рис. 4

ным пучком касательных. Окружность — одновременно и точечное, и линейчатое образование. Она включена как в поле точек, так и в поле прямых. В первом у нее есть самая внутренняя точка — центр, во втором — самая внутренняя (центральная) прямая — она проявляется внешне в виде бесконечно удаленной прямой.

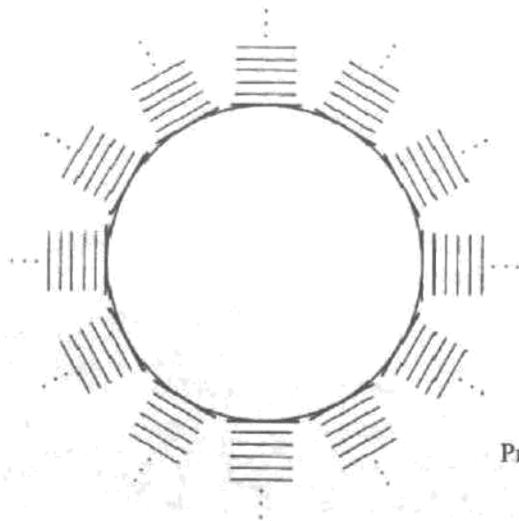


Рис. 5

Мы можем подойти к окружности односторонне, изучая только ее точечную природу (что мы и делаем, начиная заниматься геометрией). Но мы можем подойти к окружности и с точки зрения прямой. Если мы вступим на этот путь, то нам придется переосмыслить понятие радиуса. Говоря о точечной окружности, мы понимаем под радиусом отрезок, соединяющий центр с некоторой ее точкой. Отрезок — это сегмент, фрагмент точечного ряда, ограниченный двумя точками A и B (рис. 3а). Двойственным объектом будет «растр», ограниченный двумя прямыми a и b (рис. 3b). Пучок прямых может состоять и из параллельных (рис. 4). В таком пучке одна из ограничительных прямых «растра» может быть бесконечно удаленной. Если мы говорим о линейчатой окружности, то радиус — назовем его лучевым радиусом — это «растр» с параллельными сторонами, одна из которых является центральной прямой (внешне это бесконечно удаленная прямая), а другая — любой прямой на линейчатой окружности (т.е. касательной). Такие «растры» во все стороны «одинаковы» (рис. 5).

Однако что значит «одинаковы»? Чтобы измерять такие «растры», нужно ввести единицу измерения. На рис. 1 и 2 в качестве такой единицы E мы возьмем лучевой радиус поляризующей окружности, т.е. «растр» от бесконечно удаленной прямой до любой из касательных к поляризатору. Тогда линейчатые окружности на рис. 1 имеют лучевой радиус $E/2, E/3, E/4, \dots$. Радиус становится все меньше и наконец обращается в ноль (в тот момент, когда линейчатая окружность превращается в центральную прямую). На рис. 2 все происходит с точностью до наоборот: тут лучевые радиусы линейчатых окружностей становятся все больше: $2E, 3E, 4E, \dots$ и так далее. Они могут расти до бесконечности, и в тот момент, когда линейчатая окружность доходит до центра, все ее прямые проходят через точку Z . В этом граничном случае линейчатая внутренняя область занимает все поле прямых.

Мы рассматривали с вами процессы (рост и исчезновение линейчатых окружностей), преимущественно протекающие в поле прямых. Это поле прямых мы будем называть *противополем*, в противоположность точечному полю, в дальнейшем просто *полем*. На первых порах наша геометрическая интуиция распространяется исключительно на поле. Понимание противопололя мы должны еще в себе выработать. Рассмотрение точечных окружностей (рис. 2), которые равномерными шагами устремляются к бесконечности, нам вполне привычно. В результате упражнений мы постепенно привыкаем к противоположному процессу: линейчатые окружности, которые мы назовем *противоокружностями*, равномерными шагами ($1E, 2E, 3E, \dots$) устремляются к внутренней бесконечности. Эту внутреннюю бесконечность мы назовем *абсолютным центром* (а.М.) противопололя ($Z = \text{а.М.}$). Он полярен бесконечно удаленной прямой поля. Прямые, через него проходящие, мы назовем *бесконечно внутренними прямыми* (сравните с точками бесконечно удаленной прямой, которые мы называем бесконечно удаленными).

Вообще, для каждого факта, имеющего место в геометрии поля, существует двойственный (полярный) факт в геометрии противопололя. Полярным к понятию отрезка является понятие «растра». Как в поле, так и в противопололе мы рассматриваем точки и прямые. В поле точка нуль-мерна, а прямая (ряд точек) одномерна. В противопололе, наоборот, нуль-мерным основным элементом является прямая, а точка (пучок прямых) одномерна. В поле прямые имеют особенное положение, если они проходят через одну и ту же бесконечно удаленную точку, т.е. если они параллельны. В противопололе две точки находятся в особом положении, если они лежат на одной и той же бесконечно внутренней прямой. В этом случае мы говорим, что они *центрированы*. Равным образом можно построить полярное понятие к понятию угла. Раздел геометрии поля, работающий с длинами и площадями (например, теорема Пифагора) или с величинами углов (например, теорема о вписанном угле), мы называем *евклидовой геомет-*



Винсент ван Гог (1853–1890): Les Saintes-Maries (1888), тушь и перо, 43×60 см. Бросается в глаза изображенные солнца: редкие радиальные лучи, зато многочисленные прямые, намечающие оболочку. (Собрание Оскара Рейнхарта, Винтертур, Швейцария)

рией. В противополопе можно также систематически выстроить все здание геометрии, которую мы будем называть *полярно-евклидовой геометрией* (полярной нашей обычной геометрии во всех своих элементах)²².

В связке можно заниматься двумя видами геометрии, двойственными евклидовой и полярно-евклидовой геометриям на плоскости. Если выделить в связке некоторую прямую и назначить ей роль функциональной бесконечности (см. гл. 20), то будет создана предпосылка для построения геометрии, двойственной евклидовой геометрии на плоскости. Другая предпосылка будет рассмотрена в главе 27 (ортогональная инволюция). Теперь в связке действуют все специальные случаи перспективных преобразований (двойственные тем случаям перспективных преобразований на плоскости, которые были рассмотрены в главе 15). Тем самым заполняется пробел между плоскостью и связкой, на который мы указывали в главе 20.

Но на пучок из плоскости можно перенести и полярно-евклидову геометрию. Одной из предпосылок для этого является назначение одной из плоскостей на роль функциональной бесконечности.

Читатель, вероятно, чувствует, что такие рассуждения вносят в геометрию новый стиль. Без сомнения, первый геометрический опыт — как в нашей собственной жизни, так и в жизни всего человечества — связан с восприятием внешнего мира. При этом преимущественно было задействовано зрение и отчасти осязание. Повседневные встречи с телами земного мира побуждают нас составлять о них понятия (в том числе и геометрические). Мы переживаем в природе радуго, мы наблюдаем расходящиеся круги на поверхности воды. Однако чистые восприятия нас не удовлетворяют. Мы начинаем обдумывать их, и в нашем сознании складывается понятие окружности. Оно соединяется с другими понятиями, такими, как «точка», «отрезок», «угол» и так далее. Мы узнаем о закономерных взаимосвязях между ними, например о том, что все треугольники, построенные на диаметре окружности и вписанные в нее, являются прямоугольными. Мы берем в руки циркуль и видим: если отложить от произвольной точки

²² См. последнюю главу работы Луиса Лохер-Эрнста «Проективная геометрия», а также последнюю главу работы автора «Созерцательная геометрия».

окружности шесть раз подряд ее радиус, то мы снова вернемся в исходную точку. Мы размышляем над этим опытом, и однажды в нашем сознании вспыхивает понимание. Позже мы конструируем круглое колесо, и практика подтверждает найденную нашим мышлением закономерность. Такое подтверждение наполняет нашу душу удовлетворением и привносит в нашу жизнь уверенность.

Геометрические рассуждения, проведенные нами в последних главах, никак не вытекают из чувственного переживания. Они возникли благодаря тому, что мы продолжили работу с понятиями в рамках самого понятийного мира. Но продолжили не произвольно, а следуя закону двойственности. Так возникла полярно-евклидова геометрия. Причем сам характер нашего переживания понятий дает нам полную уверенность в том, что эта полярно-евклидова геометрия является стройным и непротиворечивым зданием. Другой вопрос, есть ли такая реальность, «предметы» которой живут по законам этой геометрии? Объекты, живущие по законам евклидовой геометрии, нам прекрасно известны.

Обратим внимание читателя на то, что Рудольф Штейнер указал на особый мир сил — он называл их *универсальными силами*, — действие которых может быть описано в терминах полярно-евклидовой геометрии. До последнего времени внимание людей было направлено почти исключительно на такие силы, которые описываются законами евклидовой геометрии. Эти силы Штейнер называл *центральными*, поскольку для геометрического описания их закономерностей важную роль играют центры. Типичной центральной силой является *сила тяжести*. Она действует повсюду на Земле. Каждому телу, лишенному опоры, оно сообщает ускорение по направлению к центру Земли. Если же тело покоится на опоре, то оно давит на эту опору с силой, также направленной к центру Земли, куда эта сила стремится привести всю материю. Так что понятие «центральная сила» в данном случае совершенно оправданно. В физике известны и другие силы такого рода.

Давайте построим чисто геометрическое представление о полярной ей силе. Такая сила должна увлекать «предметы» не к центру, а к *плоскости*. Конкретизируем это представление, опираясь на рис. 1. Пусть поляризирующая окружность будет сечением земного шара. Земная кора состоит из камня, точнее, из множества скальных фрагментов, движущихся по жидкой подложке и шлифуемых в процессе этого движения. Камень имеет тенденцию к распаду и в конце концов превращается в песок. Физики исследовали действие силы тяжести на предметы. Наблюдая и осмысляя явления, они обнаружили, что при этом важнейшую роль играет особая точка тела, так называемый центр тяжести. Если вырезать, например, из картона треугольник и попытаться уравновесить его на лезвии ножа или на острие иглы, то опыт удастся лишь в случае прохождения опоры через центр тяжести. Можно экспериментально определить этот центр тяжести, двигая треугольник по острию до тех пор, пока он не приобретет устойчивость. При этом можно обнаружить, что центр тяжести — это точка пересечения медиан треугольника (иначе называемых *линиями тяжести*). Выходит, центр тяжести можно найти чисто геометрически. Центр тяжести играет вообще очень важную роль в связи с силой тяжести, что обнаруживается в целом ряде явлений. Если знаешь, где он расположен, можно предсказать поведение тела под действием этой силы. В контексте рассмотрения силы тяжести центр тяжести может вполне представлять все тело. Поэтому о материально-земных телах вполне правомерно говорить, что они имеют преимущественно «точечный» характер.

Представим себе земные тела, то, как они притягиваются к центру. Образ этого дан на рис. 6а. Стрелки призваны указать на эту устремленность тел к земле.

Представим себе полярные отношения. Представим себе чисто гипотетически, — осознавая, что мы имеем дело с некоей гипотезой, — что кроме земной материи, подпадающей под действие силы тяжести (давайте назовем ее *позитивной материей*), существует еще «негативная материя». Внешне она

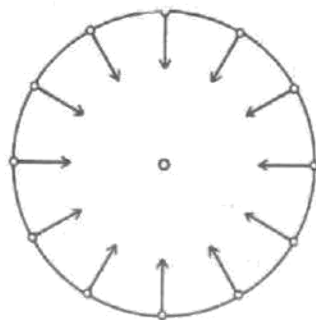


Рис. 6а

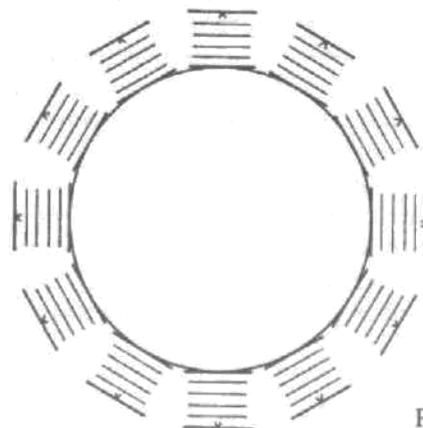


Рис. 6б

не видна; но ведь и тепло невидимо, однако оно, без сомнения, существует. «Негативная материя» должна во всех отношениях вести себя двойственно позитивной. «Тела» из негативной материи должны иметь «плоскостной характер». Они должны притягиваться «негативной силой тяжести» (будем называть ее «легкостью») по направлению к бесконечно удаленной плоскости. Говоря на геометрическом языке (рис. 6b), касательные плоскости к поверхности земли притягиваются в таком случае к бесконечно удаленной плоскости.

Возникает внутреннее ощущение двух совершенно разных по своему характеру сил, которые полярно действуют на два вида материи. Вначале важно *внутренне пережить* это различие.

Во всяком случае, читатель должен избегать слишком простых аналогий с известными понятиями материи и тяжести. Продемонстрированные качественные различия между точечной и лучевой — не говоря уже о плоскостной — геометрией показывают, что недостаточно просто «поменять знаки». Говоря о силе легкости, мы не должны считать ее просто поменявшей свое направление тяжестью. Очень важно внутренне пережить проявляющиеся различия.

Если такое переживание присутствует, читатель может снова обратиться к чувственной действительности и спросить себя: «А нет ли в этой действительности явлений, которые имеют тот или иной геометрический характер?» Тяжесть, проявления которой испытывают на себе все материальные тела, без сомнения, сродни геометрической реальности первого рода.

Странно, но мы можем наблюдать и удаляющиеся от Земли тела. Каждый год весь растительный мир поднимается над земной поверхностью, стремится вовне и раскрывается по направлению к просторам мира. А затем приходит осень, и плоды вместе с увядающими листьями падают опять на землю. На увядающие части растения действует по преимуществу сила тяжести — но ранее должна была действовать некая другая сила, которая эту тяжесть преодолевала. Наблюдая за весенним цветением растений, мы ощущаем, что они как бы устремляются к небу. Если мы представим себе, что развивающееся растение состоит не только из позитивной, тяжелой материи, но и из негативной, на которую действует легкость, то мы можем понять рост растения как взаимодействие двух полярностей. Обратите внимание, что основной орган растения — лист — во всех своих формах (обычный лист, лист чашечки, лепесток...) отчетливо проявляет плоскостной характер.

Еще раз: дело не столько в геометрических деталях (пусть они и играют весьма важную роль), сколько в том, что в процессе работы с полярными представлениями мы приобретаем внутреннее понимание различных силовых качеств. С определенностью можно сказать только то, что, исходя из одной-единственной силы, невозможно понять характер растительного мира.

В своей книге «Растение в пространстве и противопространстве» Георг Адамс и Оливер Вихер первыми вступили на очерченный нами путь. В Приложении к настоящей главе автор пытается развить свое рассмотрение в смысле упомянутой книги.

Приложение

В результате изучения книги Георга Адамса и Оливера Вихера «Растение в пространстве и противопространстве» автор пришел к следующему рассмотрению процессов роста в корневой системе и в кроне дерева:

Рост корней характеризуется тем, что соответствующие процессы чрезвычайно витальны. С течением времени растения образуют настоящую корневую систему с корневым стволом, возникающим в результате одревеснения. Витальность характерна в первую очередь для *корневых окончаний*. Они проникают в землю наподобие жизненных центров, тогда как верхние части корня быстро твердеют. Корневая система как целое имеет тенденцию образовывать сферу²³. Характеристические тенденции роста корневой системы можно выразить посредством рис. 7а: жизненные центры вторгаются от гипокотила (граница между подземной и надземной частями растения) вдоль лучей внутрь земли, формируя сферы роста. Разумеется, ни один конкретный корень точно так не растет. Это — *характеристический жест* корневого роста. С геометрической точки зрения такое движение является специальным случаем перспективного преобразования, а именно гомотетией. Осью преобразования является бесконечно удаленная прямая, а гипокотил — центром.

Поиск полярное преобразование. Оно должно быть также перспективным, но происходить в противопространстве. Центром здесь должен стать центр абсолютный, т.е. перед нами специальный случай преобразования. Мы назовем его «удаленным подобием» (в противоположность подобию центральному). Вопрос о том, где находится абсолютный центр, звучит не вполне корректно. Этот центр не

²³ См. Громан. «Растение», т. 1, стр. 10, 11.

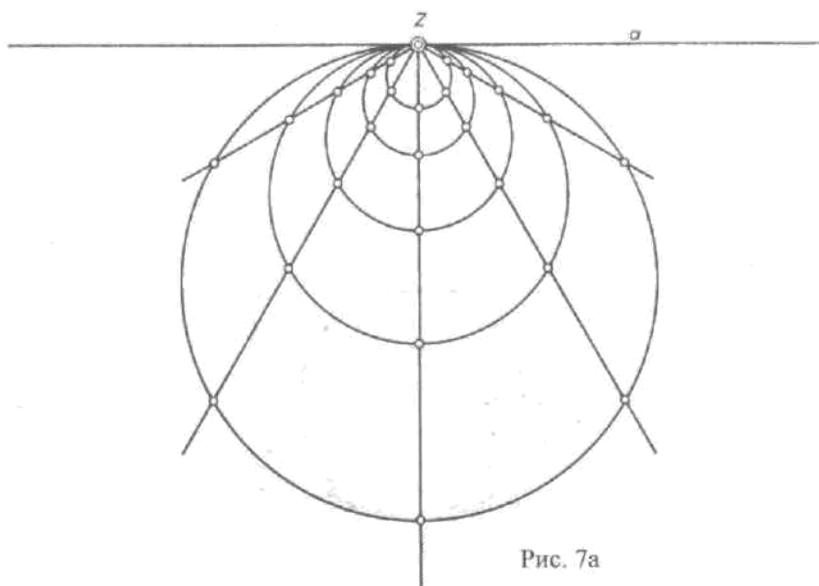


Рис. 7а

задан раз и навсегда. Абсолютный центр является функциональной бесконечностью, геометрической ролью, которую может взять на себя та или иная точка. Ситуация подобна распределению ролей в театре. Поэтому просто предоставим возможность одной из точек играть роль абсолютного центра (рис. 7b), а прямой z — роль оси перспективного преобразования.

В случае «корневого роста» все сферы проходили через центр Z . Значит, теперь все противосферы должны касаться оси z . В первом случае (рис. 7а) мы имели основания рассматривать одну из сфер в качестве исходной, а все остальные — в качестве образов (уменьшенных или увеличенных) этой первой при гомотетии. Равным образом мы можем и во втором случае рассматривать одну из противосфер в качестве исходной, а все остальные — как ее «удаленные подобия». Роль исходной противосферы сыграет окружность с центром $a.M.$, касающаяся оси z (на рис. 7b выделена несколько ярче остальных), с помощью которой мы и будем проводить «удаленное подобие». Инициатором преобразования выступит верхняя горизонтальная касательная. Она должна смещаться параллельно вверх или вниз. Другие касательные движутся при этом вокруг своих неподвижных точек на оси z . Рассмотрим для каждой касательной ее точку пересечения с касательной-инициатором. Эта точка пересечения движется по прямой, проходящей через центр преобразования ($a.M.$). Учитывая это, мы можем построить последовательные образы касательных. Точки касания также движутся по прямым, проходящим через $a.M.$ Вверх от первоначальной окружности возникают растущие (в обычном смысле этого слова) эллипсы. Когда прямая-инициатор переходит в бесконечно удаленную прямую, появляется парабола. Когда же она возвращается снизу, возникают гиперболы.

Если все происходит наоборот и касательная-инициатор движется вниз от точки $a.M.$, то из первоначальной окружности возникают постепенно уменьшающиеся (в обычном смысле слова) эллипсы. В граничном случае, когда инциатор проходит через $a.M.$, из эллиптического пучка касательных возникают два пучка прямых, один из которых проходит через $a.M.$, а другой — через точку A прямой z . (Полярная ситуация: в граничном случае (бесконечно большого радиуса) из исходной сферы возникают два точечных ряда, один на бесконечно удаленной прямой, а другой — на прямой a , проходящей через Z .) Если мы взглянем (рис. 7b) теперь на оболочку — линейчатую внутренность, она оказывается тем большей, чем меньше эллипс, и в остальных случаях сжимается в той мере, в какой растет внутренность точечная, т.е. ядро. В случае гиперболы линейчатая внутренность заполняет воронку между ветвями (см. окончание гл. 13). В конце концов оболочка сжимается до размеров прямой z (полярная ситуация: «корневая» сфера сжимается до размера точки Z).

Более тонкое рассмотрение, выходящее, однако, за рамки настоящей работы, показывает, что все эти конические сечения в противопололе представляют собой противокружности. Каждая обладает собственной центральной прямой (полярной к $a.M.$). Каждая имеет и свой собственный лучевой радиус.

Рассмотрение такого преобразования наводит на сравнение с раскрытием бутона. Обыкновенные почки открываются *качественно* совершенно так же. Георг Адамс и Оливер Вихер обращают внимание на то, что молодые листья как бы отделяются от некоего пустого пространства, которое их окружает. Разумеется, ни одна почка и ни один бутон не раскрываются точно описанным образом. Можно гово-

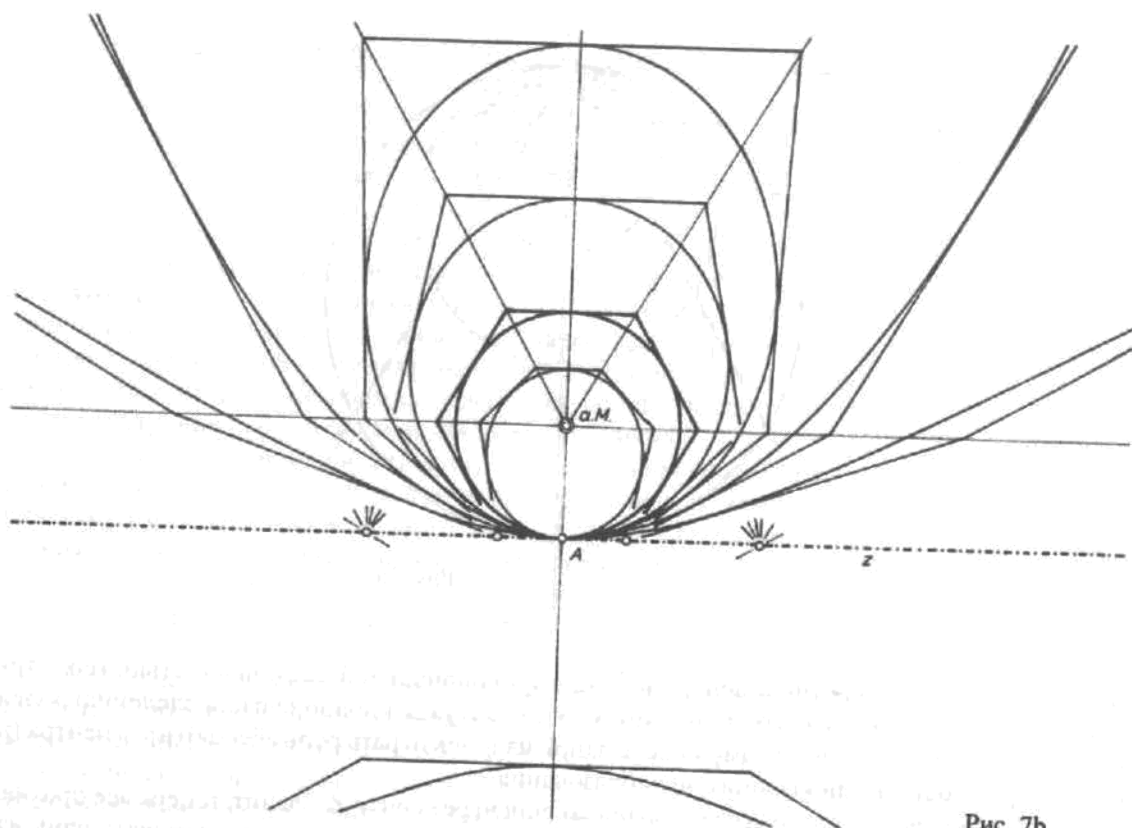


Рис. 7b

речь только о качественном сходстве. Однако в принципе *характеристические жесты корневого и листового роста полярны друг другу.*

Роль точки а.М. (рис. 7b) должна взять на себя одна из точек, находящаяся внутри закрытой листовой почки. Роль оси выполняет одна из прямых (плоскостей), проходящих через основание почки. (В пространстве нужно, естественно, говорить о центрально-планарном преобразовании, для которого рис. 7b играет роль только поперечного сечения.) Поскольку речь идет о живом процессе, расстояние между а.М. и осью (планом) в процессе развития и раскрытия почки может и должно меняться. В этом смысле рис. 7b следует представлять себе динамически.

Каждая почка должна обладать своим собственным центром а.М. и своим собственным противопространством! А почему нет? Одна и та же пьеса ведь может одновременно разыгрываться на нескольких сценических площадках.

Непривычный, совершенно новый подход! Пусть детали нуждаются в проработке и уточнении, однако сама идея столь глубока, что заслуживает безусловного внимания. Будем надеяться, что она поможет открыть совершенно новые моменты в естествознании.

Однако между двумя преобразованиями (рис. 7a и 7b) есть и различие: корневые сферы при проникновении в глыбу земли постоянно растут (растет ядро), тогда как противосферы в процессе открытия почки постепенно уменьшаются (уменьшается оболочка). Таким образом, полярным к росту корневой системы следует считать *закрытие* почки!

В чем здесь дело? Что за загадка возникает тут перед нами? Позволим себе высказать одну гипотезу: Рудольф Штейнер обратил в свое время внимание на двойной поток времени. Существует не только тот временной поток, который ведет из прошлого в будущее, но и обратный — из будущего в прошлое. Если какой-то из процессов роста проходит в одном времени, а какой-то — в другом, то такая противонаправленность становится понятной! Не встречаемся ли мы в данном случае с феноменом двойного потока времени?

27. Окружность двойных точек

Еще раз с помощью полного четырехугольника построим поляру p некоторой внешней точки P (рис. 1). В качестве прямой s_1 , проходящей через P , мы выберем диаметр. На прямой p лежат две другие промежуточные вершины — R и Q . Причем лежат они на полярах: R — на поляре q , а Q — на поляре r . Такие точки мы будем называть *сопряженными*. Можно также обозначить точку Q как \bar{R} , а точку R — как \bar{Q} . Эти точки образуют пару. Если дана одна из точек такой пары, то другую точку можно построить.

Теперь повернем прямую s_2 по часовой стрелке (s_1 зафиксирована) и проследим перемещение пары (Q, \bar{Q}) (рис. 2). (Мы можем назвать эту пару также (R, \bar{R}) .) Точка Q перемещается *вниз*, а \bar{Q} — *вверх*. Если мы продолжим поворот s_2 (рис. 3), то Q и \bar{Q} сблизятся еще сильнее. Когда s_2 совпадет с

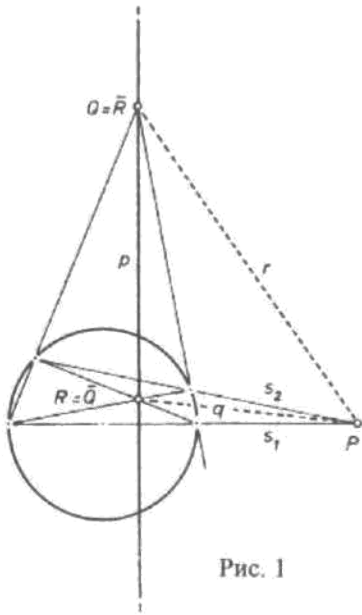


Рис. 1

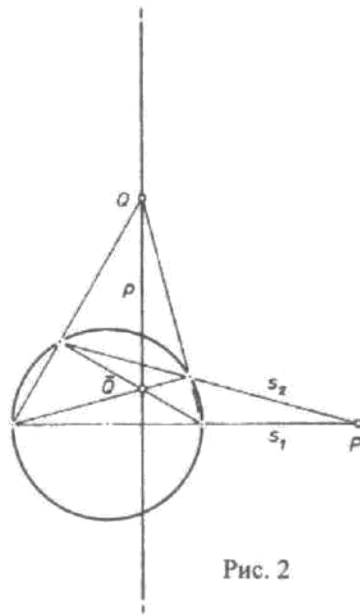


Рис. 2

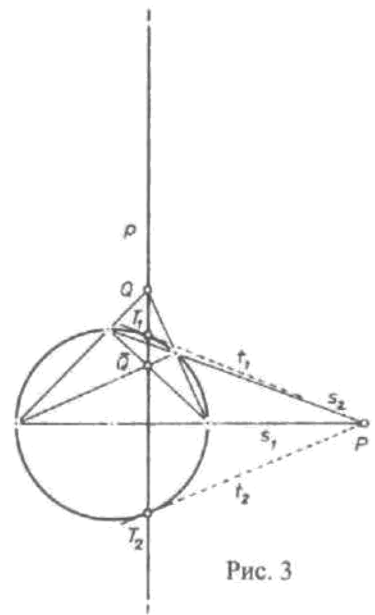


Рис. 3

касательной t_1 , точки Q и \bar{Q} соединятся, превратившись в точку касания T_1 . Если же мы вращаем s_2 на рис. 1 против часовой стрелки, то \bar{Q} движется *вниз*, а Q — *вверх*. В тот момент, когда s_1 и s_2 совпадут, \bar{Q} оказывается на s_1 , а Q — в бесконечно удаленной точке прямой p . Если мы продолжим вращение s_2 за прямую s_1 , то под диаметром появится совершенно такая же пара сопряженных точек, что и наверху.

Такое парное соответствие точек нам уже знакомо: в главе 16 мы говорили о *гиперболической*, или *противонаправленной*, инволюции. Точки касания T_1 и T_2 являются двойными точками такой инволюции. На рис. 4 построены не только пары сопряженных точек (рис. 1 – 3), но и окружность Аполлония (ср. с рис. 9 гл. 16). На *каждой* прямой, которая ее пересекает, окружность порождает пары сопряженных точек. Важно представить себе эти пары в движении: вот Q находится в бесконечно удаленной точке прямой p , тогда \bar{Q} совпадает с M . \bar{Q} движется из M в T_1 , тогда Q движется из бесконечно удаленной точки в конечную область, причем гораздо быстрее, чем \bar{Q} . В двойной точке T_1 они встречаются и меняются ролями, т.е. Q движется (причем достаточно медленно) по направлению к M , тогда как \bar{Q} устремляется вверх, к бесконечно удаленной точке, проскакивает ее на бесконечно большой скорости и затем возникает снизу, в конечной области. В двойной точке T_2 обе наши точки снова встречаются, опять меняются ролями, пока \bar{Q} не вернется в исходное положение

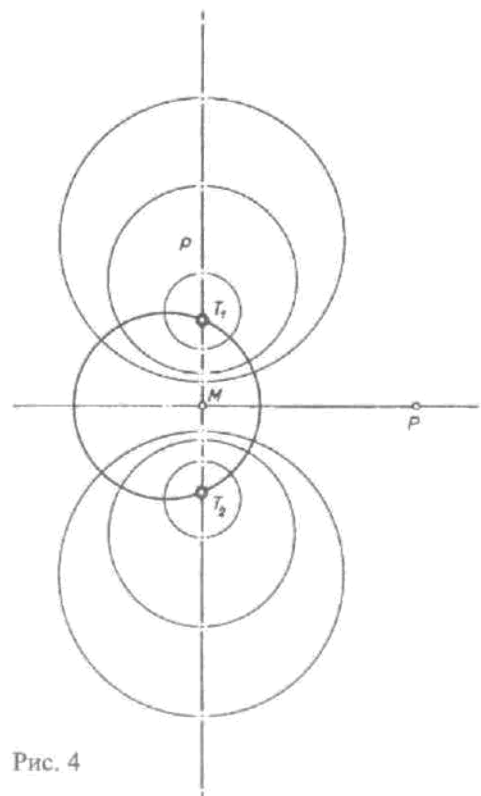


Рис. 4

M , а Q не достигнет своей исходной позиции — бесконечно удаленной точки прямой p . Во время всего процесса движения \bar{Q} постоянно двигалась *вверх*, а Q — *вниз*, почему и инволюция названа *противонаправленной*.

Однако с окружностью связано еще одно парное соответствие сопряженных точек. Рассмотрим некую *внутреннюю* точку R (рис. 5) и построим ее поляр r , опираясь на вписанный четырехугольник. Снова фиксируем s_1 и поворачиваем s_2 до положения, показанного на рис. 6. Обе точки — Q и \bar{Q} — движутся при этом *вверх*. Если мы продолжаем вращение до положения, показанного на рис. 7, и далее, то точка \bar{Q} медленно перемещается по направлению к точке M , а Q все быстрее устремляется к бесконечно удаленной точке. Если бы мы вращали s_2 из начального положения на рис. 5 по часовой стрелке, то Q и \bar{Q} , поменявшись ролями, обе двигались бы *вниз*. По этой причине такое парное соответствие сопряженных точек называется *сонаправленной* или *эллиптической инволюцией*. На рис. 8 построены пары сопряженных точек (рис. 5–7). Если представить себе, что Q находится в бесконечно удаленной точке прямой r , то \bar{Q} находится в точке M . Когда \bar{Q} начинает медленно двигаться вниз, Q впрыгивает сверху в конечную область. При этом расстояние между точками все время уменьшается. Это расстояние становится минимальным, когда они оказываются в положениях E и \bar{E} , симметричных относительно точки M . Положение (E, \bar{E}) называется *сужением* инволюции. Теперь роли опять меняются: пока Q медленно проходит отрезок $E\bar{E}$, точка \bar{Q} ускоренно бежит вниз, проскакивает на бесконечной скорости бесконечно удаленную точку и появляется сверху на большой, но при этом постепенно уменьшающейся скорости, двигаясь по направлению к точке E . Когда \bar{Q} достигнет положения E , Q достигает положения \bar{E} , откуда устремляется в бесконечность. Пара точек снова вернулась в исходное положение. Во время описанного нами процесса обе точки постоянно двигались вниз. Встречи, пересечения в этом случае не наблюдалось. Есть только место наибольшего сближения (E, \bar{E}) .

Если провести при сонаправленной инволюции через каждую пару точек окружность (рис. 8), то они образуют пучок окружностей, проходящих через точки A и B . Если соединить каждую пару точек с A или B , то получатся одни прямые углы (рис. 9). И наоборот, если вокруг точки A или B вращается прямой угол (с вершиной в этой точке), то точки пересечения его сторон с прямой r пробегает пары сопряженных точек. Две пары сопряженных точек определяют инволюцию: через каждую пару нужно провести окружность, и они пересекутся в точках A и B .

Рис. 10–12 дают нам некоторое представление о том, где может находиться сужение. Пусть точка R стремится из положения R_1 в положение R_2 и затем в центр окружности R_3 . Поляра r движется из положения r_1 через положение r_2 к бесконечно удаленной прямой. При этом сужение становится все

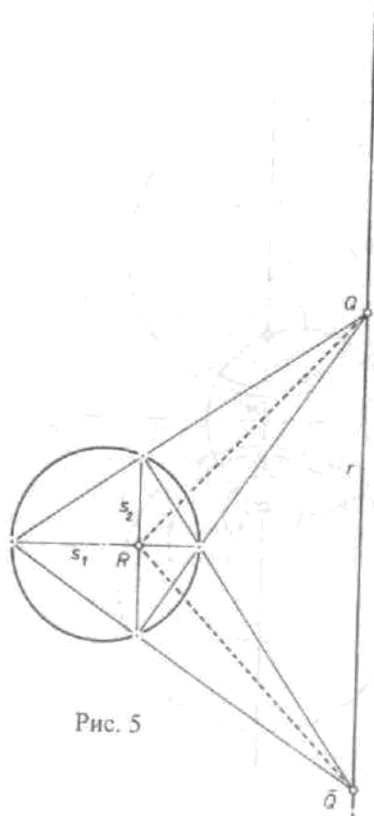


Рис. 5

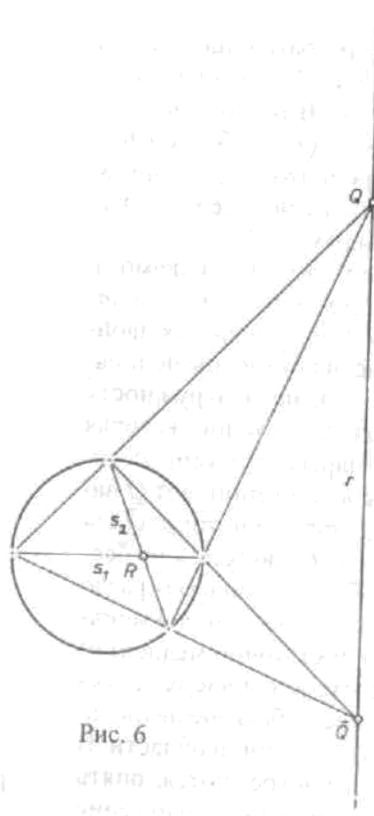


Рис. 6

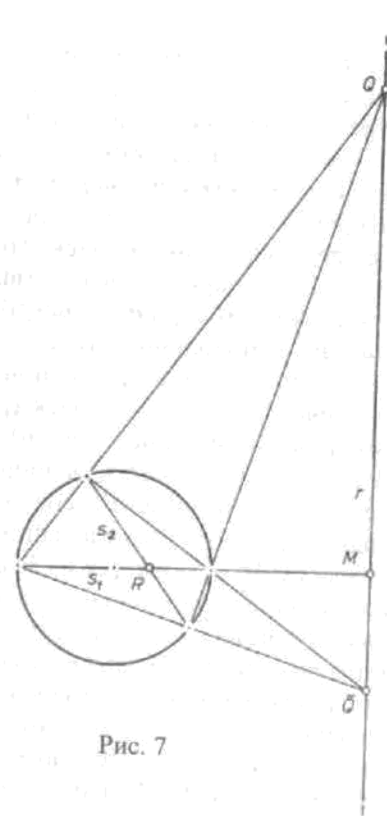


Рис. 7

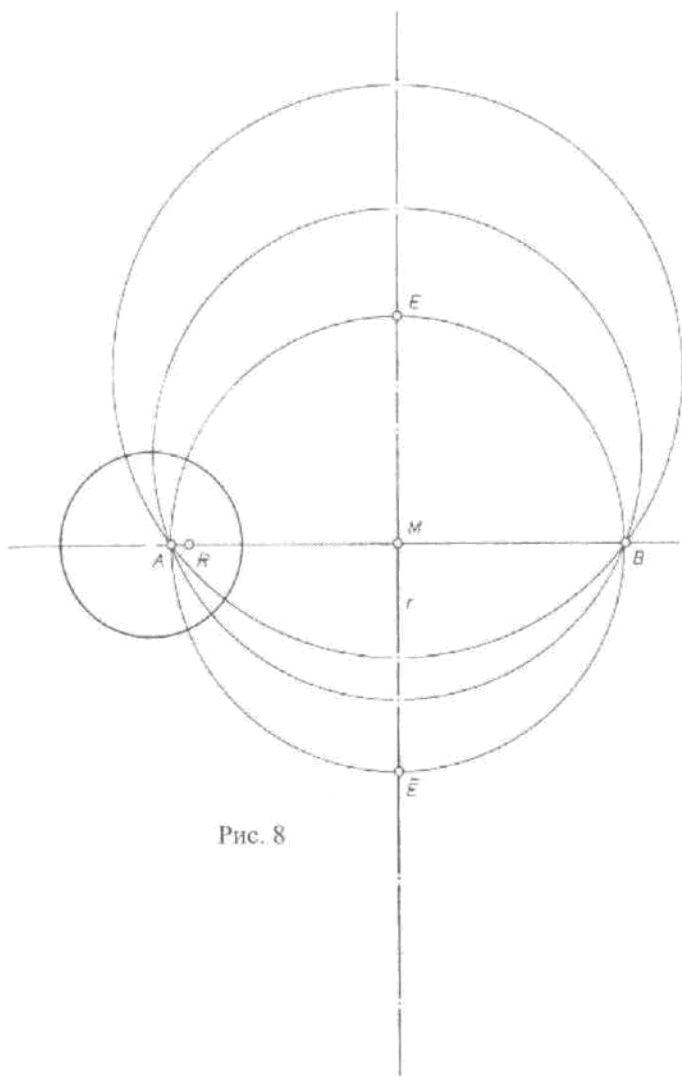


Рис. 8

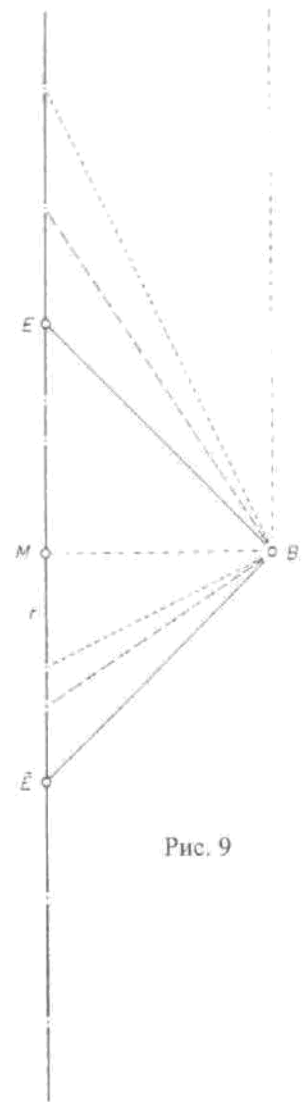


Рис. 9

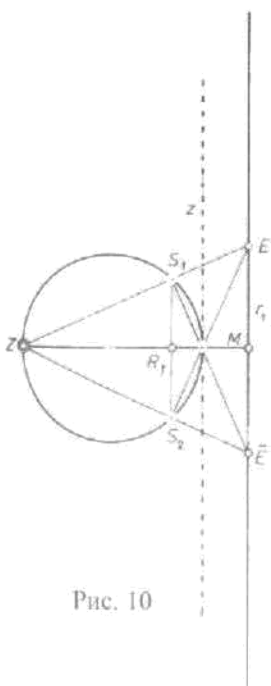


Рис. 10

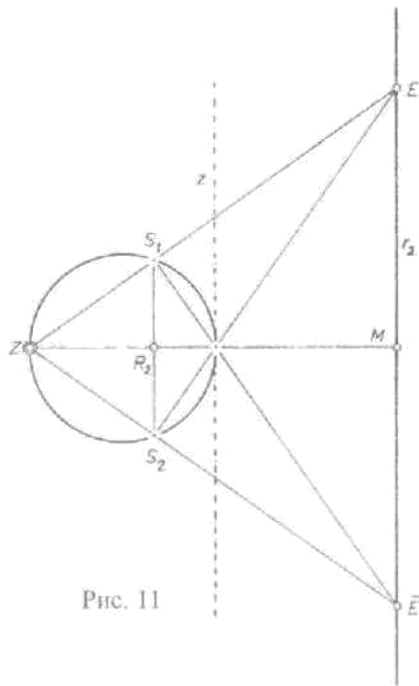


Рис. 11

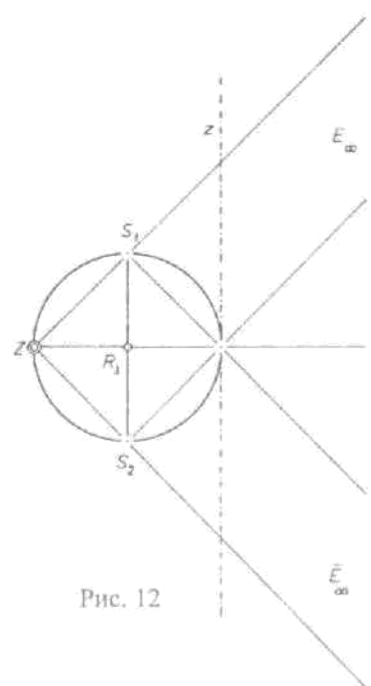


Рис. 12

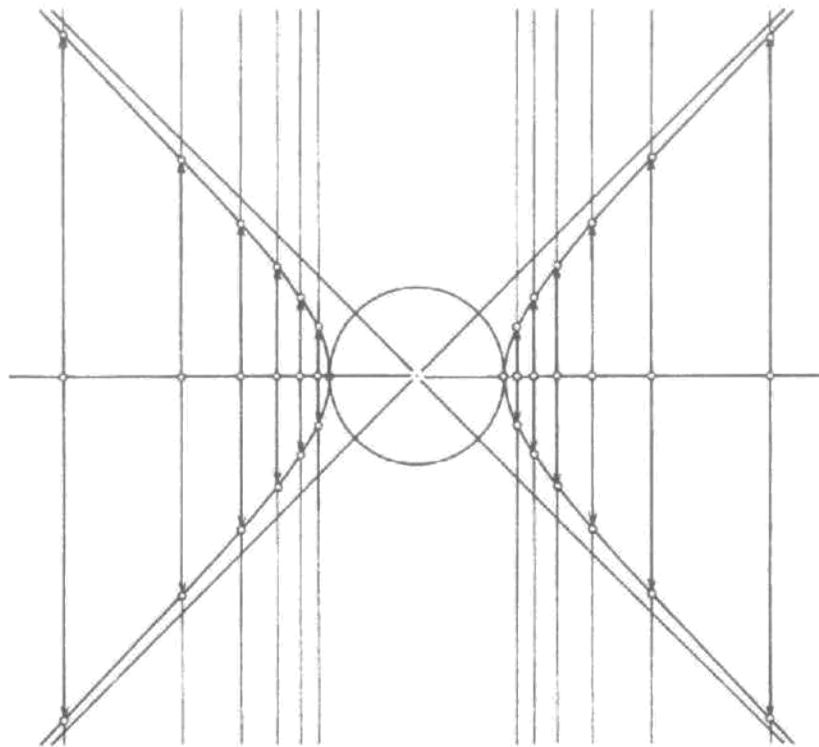


Рис. 13

шире и пробегает гиперболу (рис. 13). Почему? Точки E и \bar{E} являются образами точек S_1 и S_2 при гармоническом отражении с центром Z и осью z (рис. 10 – 12). Если S_1 и S_2 пробегают окружность, то образы должны пробегать коническое сечение. Это сечение должно быть гиперболой, поскольку на рис. 12 точки S_1 и S_2 отображаются на бесконечно удаленные точки во взаимно перпендикулярных направлениях. (Смысл стрелок будет объяснен в Приложении.)

Представим себе на каждой прямой пучка параллельных (рис. 13) пары сопряженных точек: на бесконечно удаленной прямой обе эти точки соответствуют асимптотам. Когда мы приближаемся (передвигая прямую нашего семейства параллельных) к окружности — например, справа — сужение «сужается»; точки E и \bar{E} сближаются. В момент касания точки E и \bar{E} сливаются. Когда мы пересекаем своей прямой окружность, вместо сужения появляются видимые двойные точки — двойные точки противоположенных (гиперболических) инволюций. Эти двойные точки все больше и больше расходятся в разные стороны, пока их взаимное удаление не достигает своего максимума (равного диаметру). Затем они снова сближаются, а во второй точке касания — сливаются. Из этой точки рождаются две новые точки — но уже не двойные, а точки сужения (E и \bar{E}). E и \bar{E} отдаляются друг от друга, пока не превращаются в две бесконечно удаленные точки взаимно перпендикулярных направлений. Представьте себе, что пучок параллельных на рис. 13 вращается вокруг центра окружности. Тогда перед вами возникнет картина всех инволюций на всех прямых плоскости. Окружность суть видимый продукт этой игры: он видим там, где сопряженные точки совпадают, превращаясь в двойные точки противоположенных инволюций.

Особенно интересна и наглядна инволюция на бесконечно удаленной прямой: каждой бесконечно удаленной точке соответствует в этом случае бесконечно удаленная точка, лежащая в перпендикулярном направлении. И так для каждой окружности. Окружности выделяются из всего семейства конических сечений тем, что они порождают на бесконечно удаленной прямой так называемые ортогональные инволюции.

Можно рассматривать преобразование как данное, а окружность — как его результат. Действительно, если задать на плоскости произвольный полярный треугольник (т.е. соотнести в треугольнике каждой стороне противоположающую вершину, назначив ее полярной), то для всех прямых на плоскости определена инволюция, достаточно лишь задать еще одну точку A вместе со своей полярной a . Могут возникнуть два случая:

1-й случай: На двух сторонах полярного треугольника возникают противоположенные (гиперболические) инволюции, а на третьей — сонаправленная (эллиптическая). Тогда то же будет и для всех остальных полярных треугольников. Геометрическим местом двойных точек всех противоположенных инволюций будет коническое сечение, в частном случае — окружность (ортогональная инволюция на бесконечно удаленной прямой).

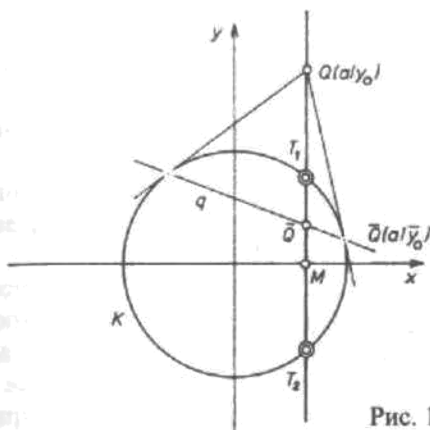


Рис. 14

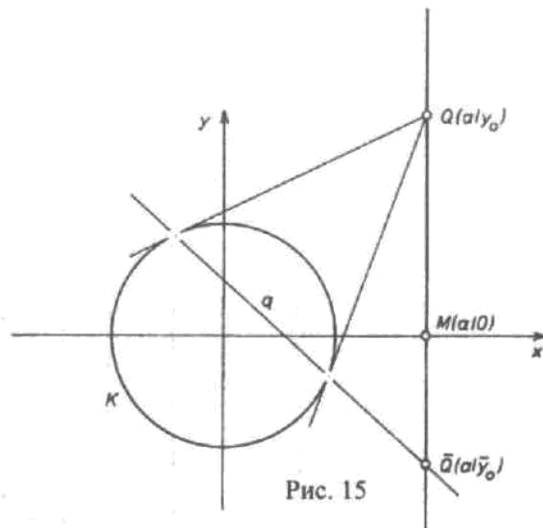


Рис. 15

2-й случай: На всех трех сторонах данного полярного треугольника возникают сонаправленные (эллиптические) инволюции. Тогда вообще все инволюции на всех сторонах будут сонаправлены. Двойных точек не будет вообще (см. главу о коллинеациях в книге Луиса Лохер-Эрнста «Проективная геометрия»).

Приложение

Инволюции можно описать аналитически:

1-й случай: Противонаправленная (гиперболическая) инволюция на прямой $x = a$ ($0 < a < r$) (рис. 14):

$$\begin{aligned} K: & \quad x^2 + y^2 = r^2 \\ q: & \quad ax + y_0 y = r^2 \\ \bar{Q} \text{ на } q: & \quad a^2 + y_0 \bar{y}_0 = r^2 \\ & \quad y_0 \bar{y}_0 = r^2 - a^2 \quad (\text{уравнение инволюции}). \end{aligned}$$

Итак, произведение расстояний двух сопряженных точек от M постоянно.

Двойные точки определяются соотношением $y_0 = \bar{y}_0$. Подставим данное соотношение в уравнение инволюции и получим:

$$\begin{aligned} y_0^2 &= r^2 - a^2 \\ y_0 &= +\sqrt{r^2 - a^2}. \end{aligned}$$

На самом деле это ординаты точек T_1 и T_2 .

2-й случай: Противонаправленная (гиперболическая) инволюция на прямой $x = a$ ($a > r$).

Решение выглядит совершенно так же, как и в первом случае, и дает следующее уравнение инволюции:

$$y_0 \cdot \bar{y}_0 = r^2 - a^2 < 0$$

Также и в этом случае произведение расстояний до M постоянно, но теперь оно имеет отрицательный знак. Когда точка лежит над осью x , сопряженная точка лежит под осью; они ни в каком случае не могут совпасть. Инволюция не имеет действительных двойных точек — зато имеет мнимые! Если мы сформулируем условие на двойную точку ($y_0 = \bar{y}_0$) и подставим его в уравнение инволюции, мы получим:

$$\begin{aligned} y_0^2 &= r^2 - a^2 < 0 \\ y_0 &= \sqrt{r^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Этот корень можно извлечь двояким образом:

$$y_0 = +i\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Точки с координатами $(a; +i\sqrt{a^2 - r^2})$ являются мнимыми двойными точками сонаправленной (эллиптической) инволюции. Их следует рассматривать также принадлежащими к окружности, как и

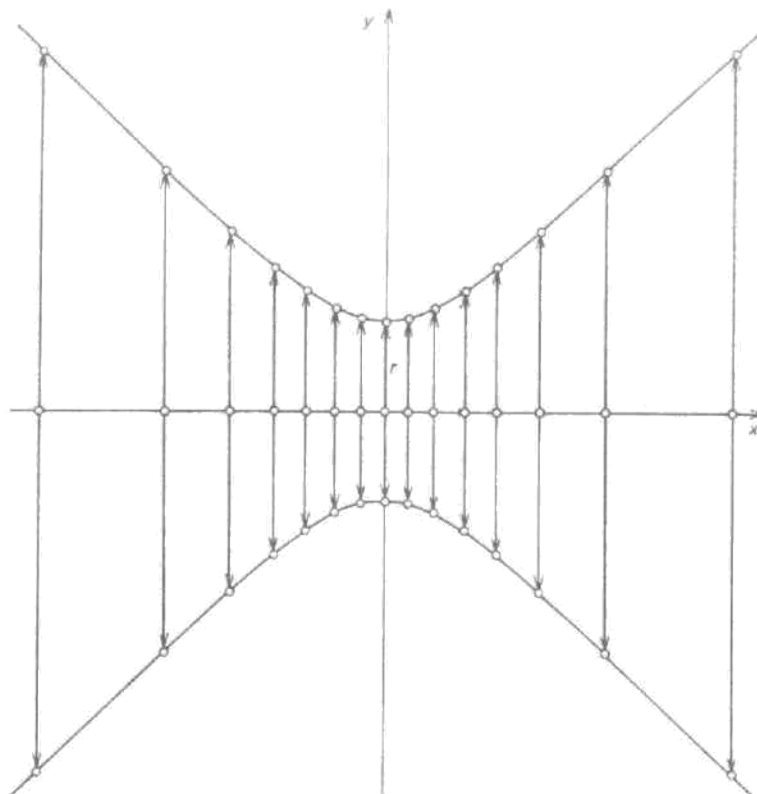


Рис. 16

действительные двойные точки противоположенной (гиперболической) инволюции. Если мы начертим окружность, то видимыми для нас являются ее действительные точки. Но если мы хотим охватить своим сознанием всю окружность, то мы должны думать и о ее мнимых точках: о двойных точках всех сонаправленных инволюций. Они не видимы в том же смысле, как действительные двойные точки. Однако мы можем взглянуть на сонаправленные инволюции как на следы мнимых точек в действительной области. Каждая сонаправленная инволюция может быть пройдена парой точек в том или ином направлении. Идея Штаудта состояла в том, чтобы приписать какой-то мнимой двойной точке одно направление обхода, а какой-то — другое. Для такой *направленной* инволюции можно ввести сокращенное обозначение: стрелку от M к E или к \bar{E} . На рис. 13 эти стрелки изображены. Если мы начнем вращать рис. 13, то мы получим все «стрелочное поле» целиком. Стрелки — это еще не сами мнимые точки. Они лишь обозначают направленную инволюцию — для того, чтобы след мнимого в действительном стал видимым для нас.

Если начать вращать стрелки на рис. 16 вокруг центра, то мы получим «стрелочное поле уравнения $x^2 + y^2 = -r^2$. Окружность состоит из чисто мнимых точек.

Поскольку все окружности порождают на бесконечно удаленной прямой одинаковую ортогональную инволюцию, то и на этой прямой возникают те же двойные мнимые точки. Их называют *абсолютными точками окружности*. Они принадлежат всякой окружности — являются центрами пучка, объединяющего в себе все окружности.

Можно рассматривать и инволюцию сопряженных в некоторой точке прямых. В точке за пределами окружности такая инволюция противоположена (например, в точке P рис. 1). Обе двойные прямые в таком случае действительны — это касательные. В точке внутри окружности инволюция сонаправлена (например, в точке R на рис. 1). Обе мнимые двойные прямые также можно рассматривать как касательные к окружности. Две мнимые касательные, проходящие через центр, проходят и через абсолютные точки (и являются асимптотами окружности).

Многие геометрические образования — например, конические сечения — только отчасти проявляются в действительной области. К действительным элементам нужно примысливать элементы мнимые, и только тогда фигура предстанет нашему сознанию в целостности.

Дальнейшие шаги в мнимую область читатель найдет в книге Луиса Лохер-Эрнста «Геометрические метаморфозы».

28. Экскурс в лучевую геометрию — геометрия в пространстве прямых

В главе 9 мы увидели, что пространство прямых богаче пространства плоскостей и пространства точек. Оно является не трех-, а четырехмерным. Кроме того, оно двойственно самому себе.

И действительно, многообразие геометрических объектов в лучевом пространстве отличается особым богатством. Кратко взглянем на него в последней главе этой книги.

Особое положение лучевого пространства проявляется еще и в том, что в нем носителями совокупностей прямых могут быть сами прямые. В пространстве точек и в пространстве плоскостей основные фигуры всегда заимствуют носитель из другого пространства (см. гл. 10).

Представим себе в лучевом пространстве некоторую прямую u . Будем считать, что она является носителем. Такая прямая u будет в дальнейшем называться также *направляющей прямой*. Некоторые прямые скрещиваются с этой прямой u , т.е. проходят мимо нее. Другие пересекают u в одной точке. Такие прямые мы будем называть *встречными*. В каждой точке направляющей прямой существует связь встречных прямых. Совокупность всех встречных прямых мы будем называть *деревом прямых*. На направляющей прямой имеется ∞^1 точек, через каждую точку проходит ∞^2 встречных прямых. Таким образом, дерево прямых состоит из $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^3$ прямых. Оно является особым случаем другой совокупности прямых — *линейного комплекса*, который мы опишем в конце главы.

Встречные прямые могут быть с тем же успехом названы соединительными, поскольку они соединяются с направляющей прямой. Рассмотрим пучок плоскостей направляющей прямой: поле прямых каждой плоскости этого пучка состоит из сплошных соединительных прямых. ∞^1 плоскостей, в каждой плоскости — ∞^2 соединительных прямых. Снова тот же результат: дерево прямых состоит из $\infty^1 \cdot \infty^2 = \infty^3$ соединительных прямых.

А что произойдет, если мы в качестве направляющих прямых возьмем две скрещивающиеся прямые u и v ? Каждая точка P на прямой u определяет вместе с прямой v плоскость E (рис. 1). Пучок прямых (E, P) состоит из встречных прямых, проходящих как через u , так и через v . Когда точка P пробегает ряд u , плоскость E вращается в пучке v . В каждом положении E и P пучок (E, P) является пучком встречных прямых. Совокупность всех этих встречных (или соединительных) прямых называется *гиперболической лучевой конгруэнцией*. Она состоит из ∞^2 прямых. (Конгруэнция в данном случае никак не связана с равенством при наложении.) Наряду с гиперболической существует еще *эллиптическая лучевая конгруэнция*, направляющие прямые u и v которой являются мнимыми. Мы опишем ее несколько позже.

Особенно легко представить себе совокупность прямых, если в качестве направляющих выбрать *три* попарно скрещивающиеся прямые u, v, w . Представим себе их в виде бесконечных ребер куба (рис. 2), параллельные им ребра b, c, a являются встречными прямыми.

Каждая из этих встречных прямых пересекает две направляющие в вершинах куба, а третью — в ее бесконечно удален-

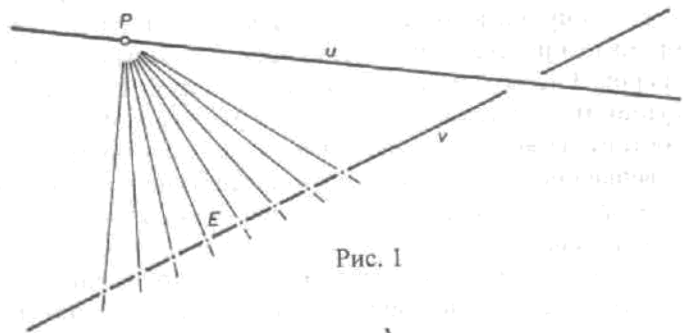


Рис. 1

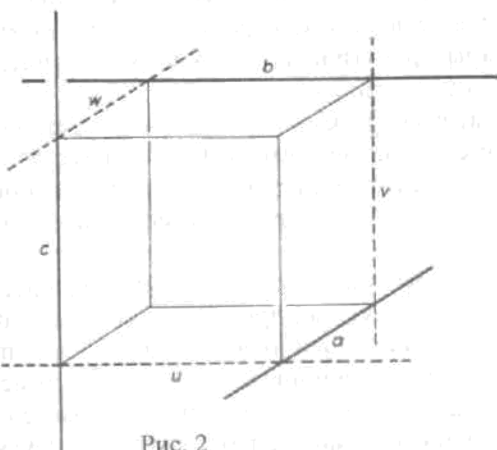


Рис. 2

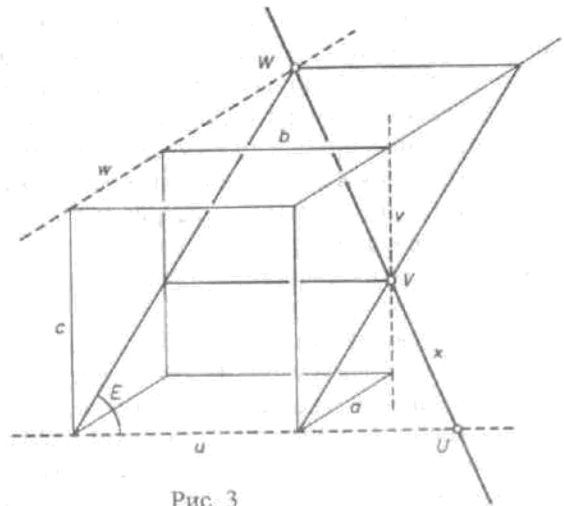


Рис. 3

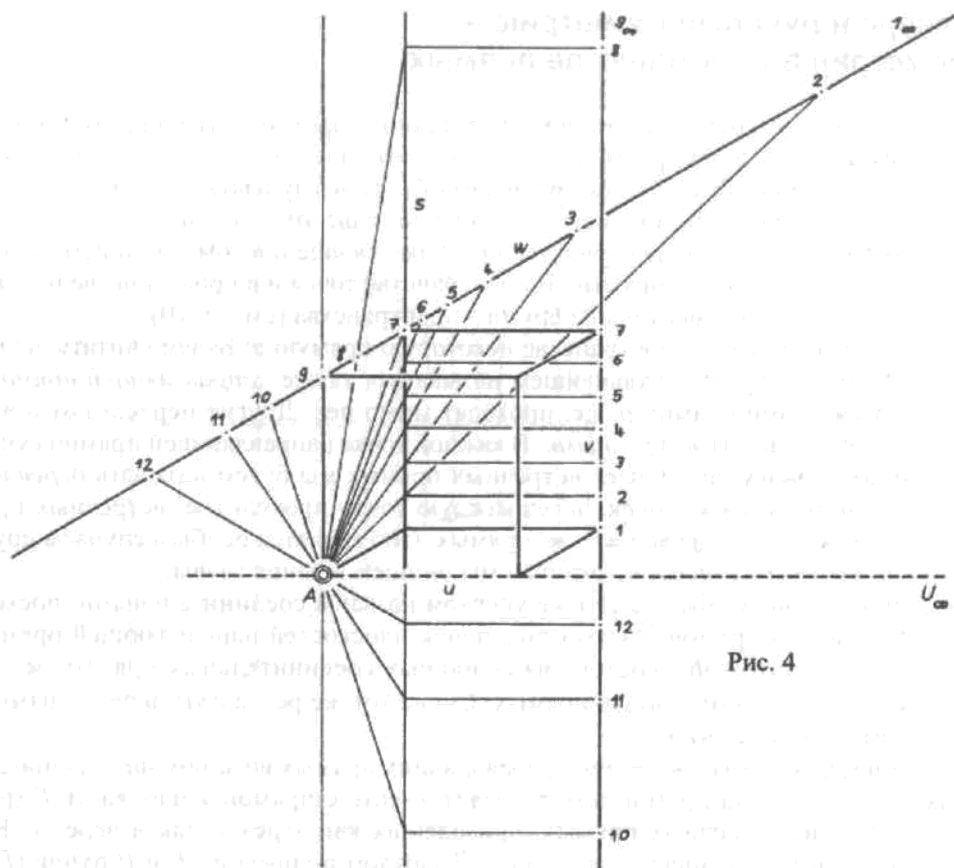


Рис. 4

ной точке. В этом смысле выбранные нами встречные прямые находятся в особом положении. Как найти в таком случае встречную прямую общего положения? Проведем через u произвольную плоскость E (рис. 3). Она пересекает направляющие v и w в точках V и W . Соединяющая их прямая x пересекает прямую u в точке U , т.е. является встречной. Когда E «пролистывает» весь пучок плоскостей u , прямая x пробегает множество всех встречных прямых; точки U, V, W пробегают при этом ряды u, v, w . Из рис. 3 легко понять, при каких положениях плоскости E возникают встречные прямые a, b, c . Совокупность всех встречных прямых мы назовем *линейчатым рядом*. Он состоит из ∞^1 прямых (пучок u состоит из ∞^1 плоскостей, и в каждой плоскости лежит одна встречная прямая). Поскольку u, v, w совершенно равноправны, можно заключить, что *в каждой плоскости (проходящей через направляющую прямую) и через каждую точку (лежащую на направляющей прямой) проходит ровно одна встречная прямая*.

На рис. 4 изображены некоторые положения плоскости E . Пучок плоскостей вырезает на левой боковой стенке пучок прямых с центром A , а на задней — пучок параллельных с центром U_∞ . Соответствующие друг другу точки на v и w имеют одинаковые номера. Если рассмотреть рис. 4 как *плоскостное изображение*, то он будет соответствовать рис. 6а главы 24. Точечные ряды v и w проективно соответствуют друг другу. Ряд w перспективно отображается на ряд v из центра A , а тот, в свою очередь, отображается из центра U_∞ на ряд v . Если соединить пары проективных точек на v и w (рис. 5), то соединительные прямые окажутся звеньями линейного пучка 2-го порядка.

Этот пучок является плоским изображением линейчатого ряда. Сам линейчатый ряд находится в пространстве, и каждые две встречные прямые являются скрещивающимися. Рис. 5 является параллельной проекцией куба и линейчатого ряда (последний проектируется в эллиптический венок прямых). Если взять в качестве направляющих другие ребра (рис. 6 и 7), то в проекции может получиться и гиперболический венок.

Но как выглядит линейчатый ряд в пространстве? Вначале дадим его наглядное описание, а уже затем строго обоснуем его. В двух горизонтальных плоскостях, друг над другом, расположим две окружности равного радиуса. На обеих окружностях построим правильный двенадцатиугольник, пронумеровав вершины цифрами — от 1 до 12. Далее следует соединить вершины с одинаковыми номерами. Если соответствующие вершины расположены точно друг над другом, то проведенные прямые оказываются образующими *цилиндра*. В этом случае одну окружность нужно зафиксировать, а другую —

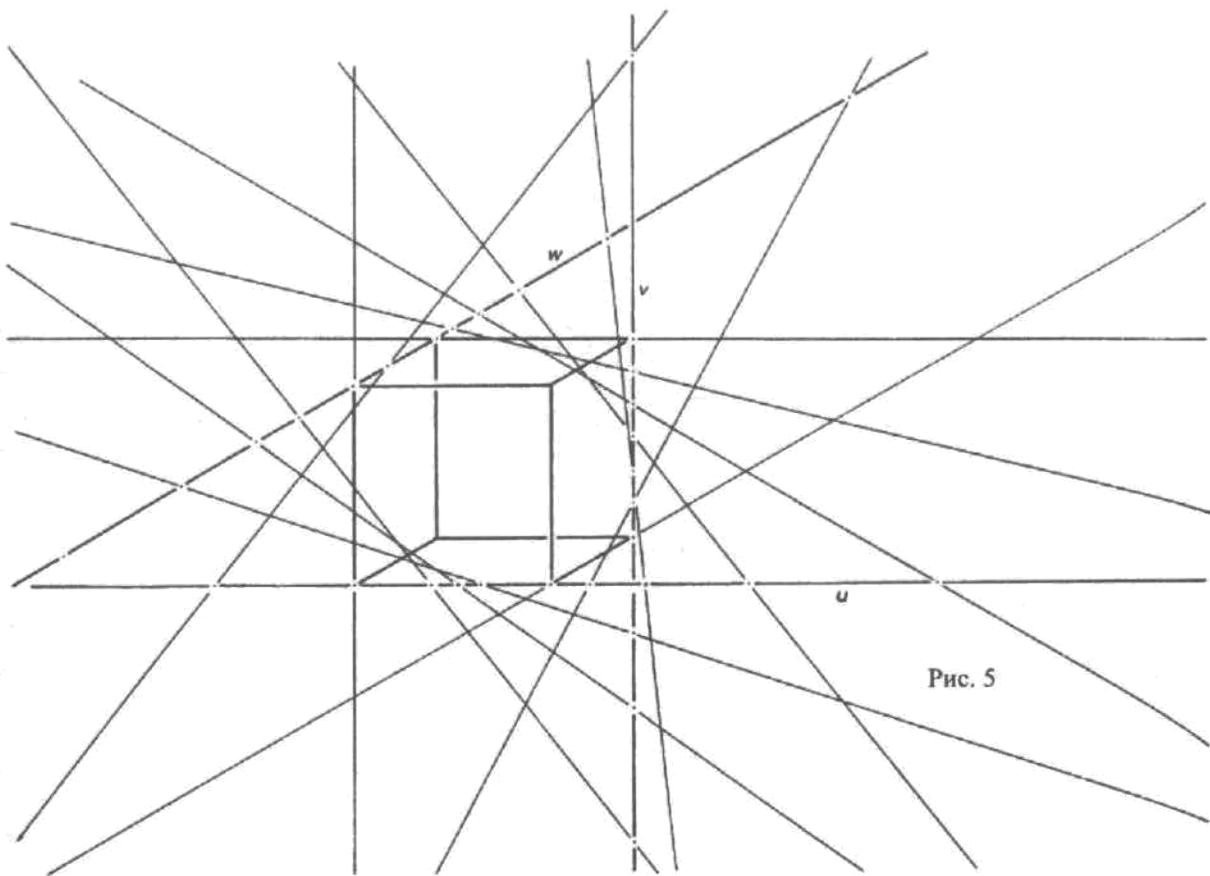


Рис. 5

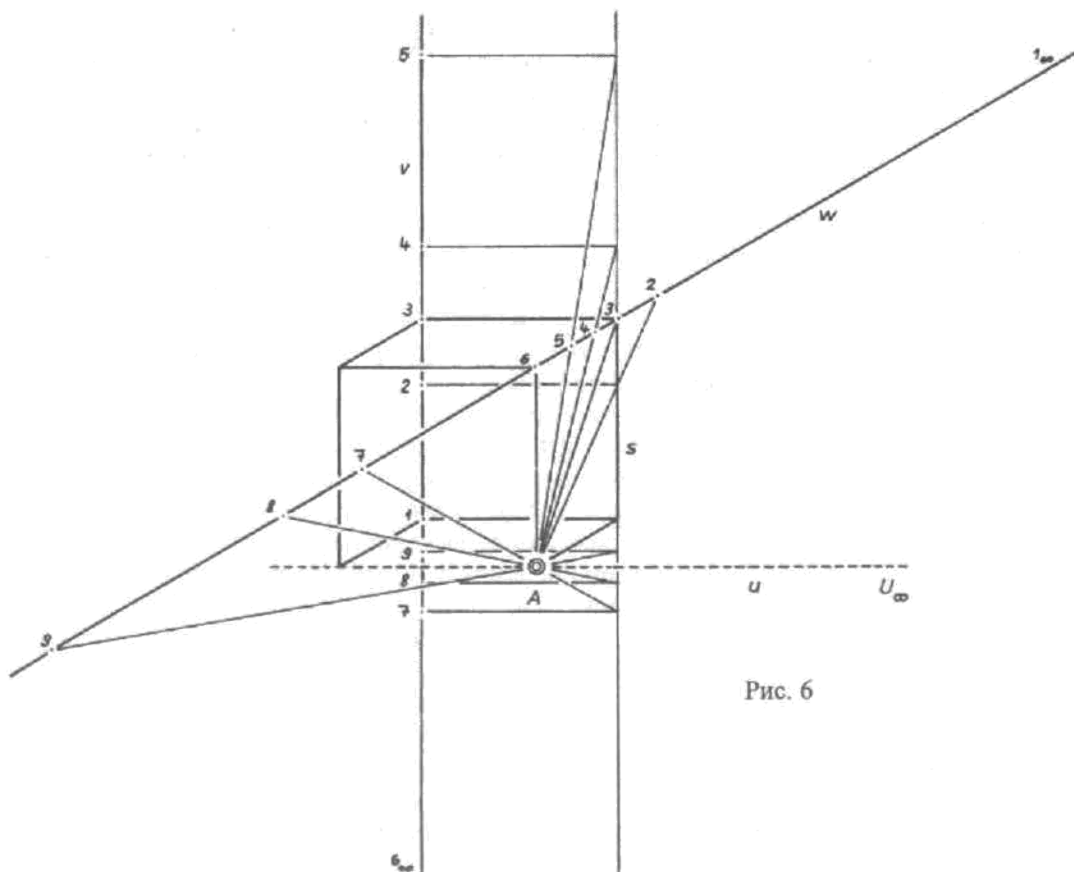


Рис. 6

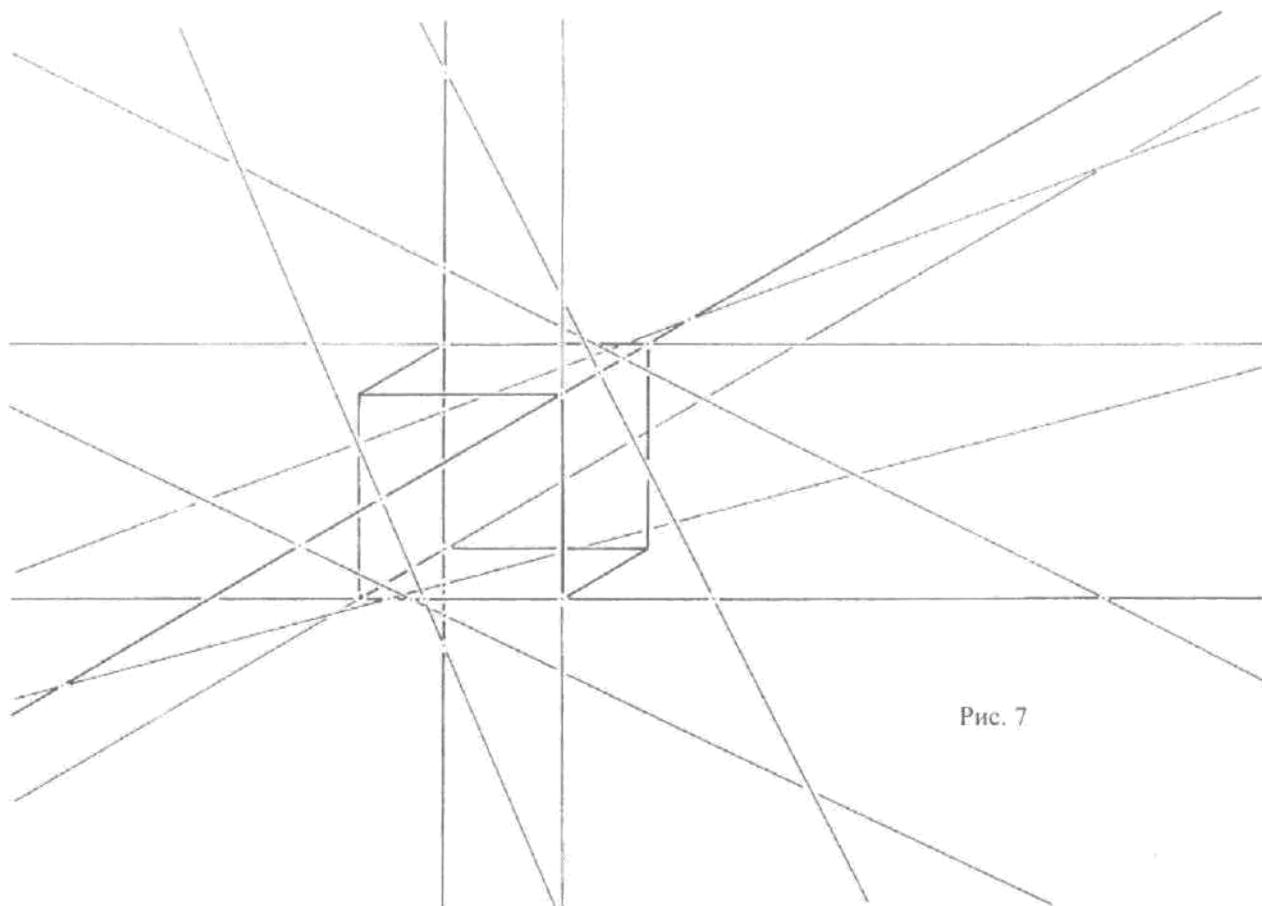


Рис. 7

повернуть. Теперь уже соединительные прямые окажутся не на цилиндре, а на некоей искривленной поверхности, по форме напоминающей трубку с зауженной горловиной и расширяющимися вверх и вниз отверстиями (рис. 8). Такая поверхность называется *гиперboloидом*. Чем сильнее поворачивается подвижная окружность, тем сильнее стянута горловина гиперboloида. В пределе, когда вершины с одинаковыми номерами диаметрально противоположны друг другу, горловина превращается в точку; линейчатая же поверхность при этом вырождается в конус. Между двумя особыми положениями (цилиндр и конус) находится гиперboloид.

Положение соединительных прямых варьируется изменением расстояния между окружностями. Рис. 5 — это взгляд внутрь гиперboloида, рис. 7 — вид сбоку (равно как и рис. 8). Рассмотренные гиперboloиды имеют ось вращения, поэтому их еще называют гиперboloидами *вращения*.

Теперь попытаемся объяснить, почему встречные прямые трех направляющих лежат на гиперboloиде. Рассмотрим еще раз рис. 2: три направляющие и три встречные прямые. Эту конструкцию мы назовем *основой*. Кроме шести прямых основе принадлежат еще девять точек пересечения и девять соединительных плоскостей (соединяющих каждую направляющую с каждой встречной). Как бы ни были расположены направляющие и встречные прямые, основу всегда можно дополнить до гексаэдра (рис. 9). (Рис. 2 является только правильным частным случаем рис. 9.) Оба рисунка наводят на мысль об определенном циклическом порядке прямых: u, a, v, b, w, c и снова u . Рассмотрим шесть точек пересечения и шесть соединительных плоскостей, порожденных шестью парами соседних (в цикле) прямых. Назовем их *вершинами* и *гранями*. Каждой вершине в цикле находится противоположная, равно как и каждой плоскости, — например, друг против друга располагаются пары (u, a) и (b, w) . При этом результатом скобок могут быть как вершины, так и грани. Закономерности возникающей структуры можно описать следующим образом: *Прямые пересечения p, q, r противоположных плоскостей цикла лежат на одном уровне (плане) Z , тогда как соединительные прямые p^*, q^*, r^* противоположных вершин проходят через общий центр Z^* .*

Наше требование к циклу: направляющие и встречные прямые должны чередоваться. Кроме рассмотренного цикла есть еще пять других, удовлетворяющих этому требованию. Например, цикл u, a, w, c, v, b и снова u . На рис. 10 построены прямые пересечения противоположных плоскостей и соединительные прямые противоположных вершин. Они лежат в одном плане Z и проходят через центр Z^* . В

работе автора «Созерцательная геометрия» показана пространственная конфигурация, возникающая при рассмотрении центров и планов всех шести циклов основы.

Пересечем теперь цикл на рис. 9 произвольной плоскостью X^- , не проходящей ни через направляющую, ни через встречную прямую (рис. 11). Секущая плоскость X^- может быть задана, например, прямой пересечения p с планом Z^- и точкой пересечения 1 с прямой u .

Точки пересечения p с p_-, q_-, r_- мы назовем I, II, III. Можно построить прямые пересечения X^- с гранями цикла: если соединить 1 и I, мы получим пересечение X^- с плоскостью (u, a) . Точку пересечения этой прямой с a мы назовем 2. Теперь соединим 2 с II и получим пересечение с (a, v) . Узнаете? Шестиугольник Паскаля с вершинами 1–6 и прямая Паскаля p ! Вершины 2, 4, 6 являются точками пересечения X^- с встречными прямыми a, b и c , а точки 1, 3 и 5 – точками пересечения с направляющими u, v, w . Но, поскольку через каждую точку направляющей проходит ровно одна встречная прямая, можно считать, что и 1, 3, 5 являются точками пересечения со встречными прямыми.

А теперь важное следствие: представим себе, что направляющие u, v, w и встречные прямые a и b зафиксированы. Прямая c при этом пробегает все множество встречных прямых. Как в этом случае движется точка пересечения 6 прямой с X^- ? По точечному ряду 2-го порядка! Если вершины 1–5 шестиугольника Паскаля зафиксированы, то они определяют точечный ряд 2-го порядка, который должна пробегать шестая точка. Итак, сечение линейчатой поверхности произвольной плоскостью X^- есть точечный ряд 2-го порядка. Рис. 12 демонстрирует сечение цикла (ср. с рис. 2) срединно-перпендикулярной плоскостью выделенной диагонали. Получается хорошо нам знакомый правильный шестиугольник (нарисованы также и встречные прямые, проходящие через точки 1, 3 и 5). Соответствующий точечный ряд 2-го порядка — это окружность, горловина гиперboloида. Если сместить секущую плоскость параллельно самой себе, то шестиугольник Паскаля изменится, однако описанная вокруг него кривая 2-го порядка останется окружностью. Ее радиус растет с ростом расстояния от секущей плоскости до центра куба. Действительно, на первый взгляд получается расширяющаяся труба.

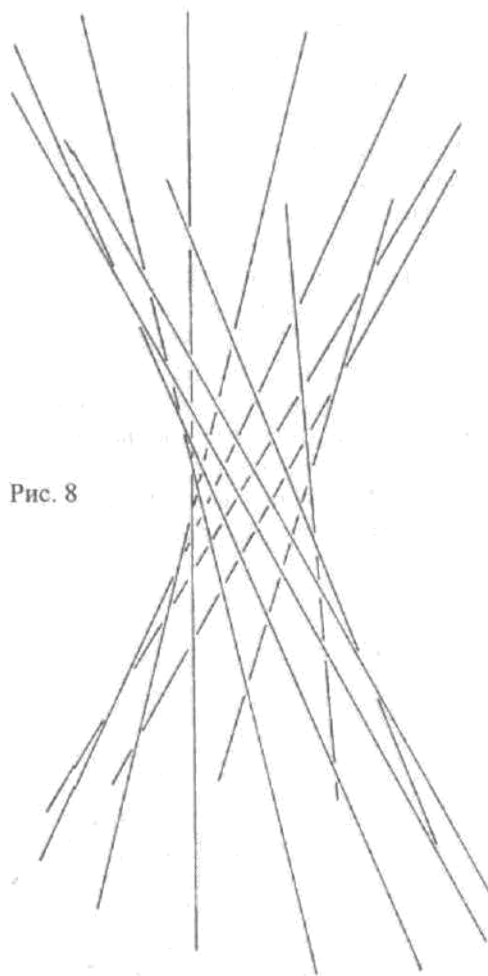


Рис. 8

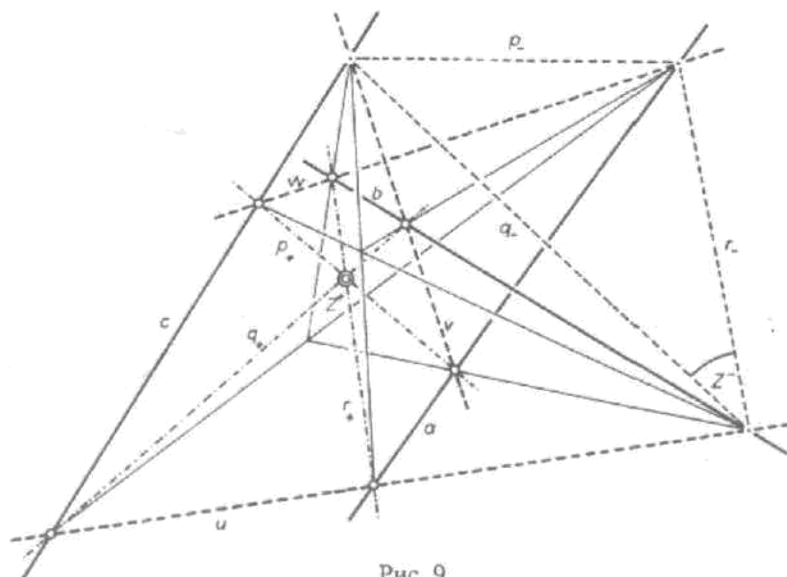


Рис. 9

Тройка направляющих и тройка встречных прямых совершенно равнозначны: они могут спокойно поменяться ролями. На рис. 2 и 9 прямые a, b и c можно с полным правом считать направляющими, а прямые u, v и w — встречными. Тогда встречные прямые для прямых a, b и c также образуют регулярное множество, которому принадлежат и прямые u, v, w . Мы получаем важное утверждение, что на одном и том же гиперboloиде сосуществуют два линейчатых ряда. Любые две прямые одного ряда всегда скрещиваются. Напротив, две прямые из разных рядов всегда пересекаются

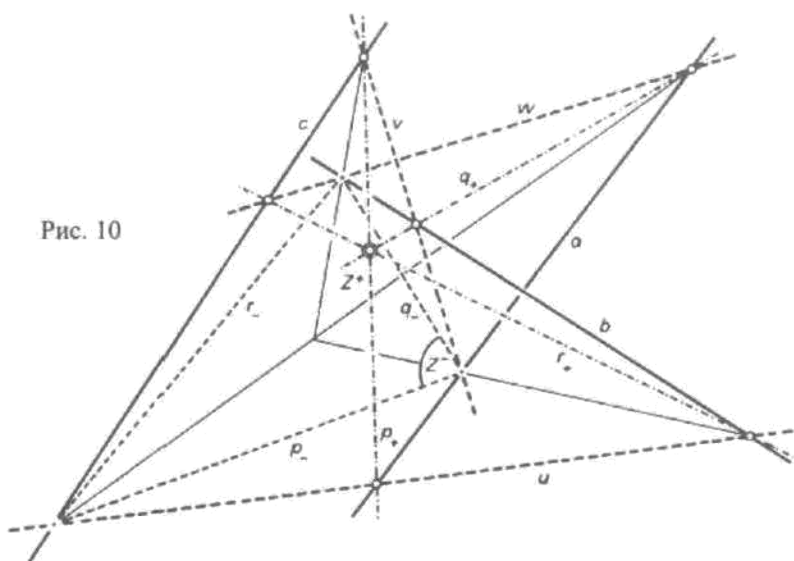


Рис. 10

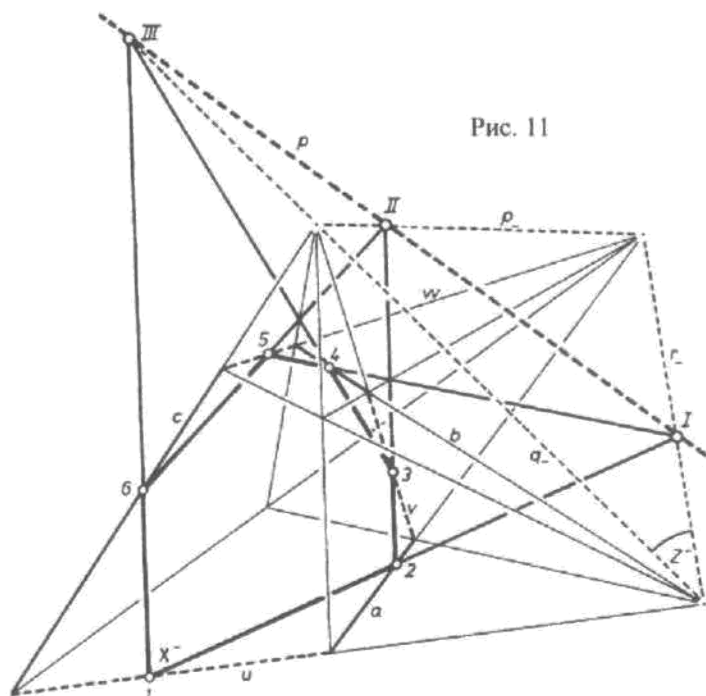


Рис. 11

на поверхности гиперboloида. Плоскость, проходящая через эти две прямые, касается поверхности гиперboloида в точке пересечения прямых.

Всякая тройка прямых одного ряда вместе со всякой тройкой прямых другого ряда образует основу. Все эти основы принадлежат одному гиперboloиду.

Существует специальный случай гиперboloида (рис. 13). Выберем в качестве направляющих u и w диагонали двух граней, в качестве v — плоскостная ось, пусть встречной прямой будет горизонтальная плоскостная ось, идущая в направлении на

зрителя. При смещении вправо направляющие будут располагаться все время в плоскостях, параллельных боковым стенкам куба, но при этом их наклон будет все круче и круче. На правой стенке угол подъема прямой (назад) достигнет величины 45° . Однако крутизна растет довольно медленно: значение в 90° будет достигнуто только в тот момент, когда параллельная плоскость достигнет бесконечно удаленной плоскости пространства. Налево все происходит в принципе так же, только прямые поднимаются не назад, а вперед. Особенность такого линейчатого ряда состо-

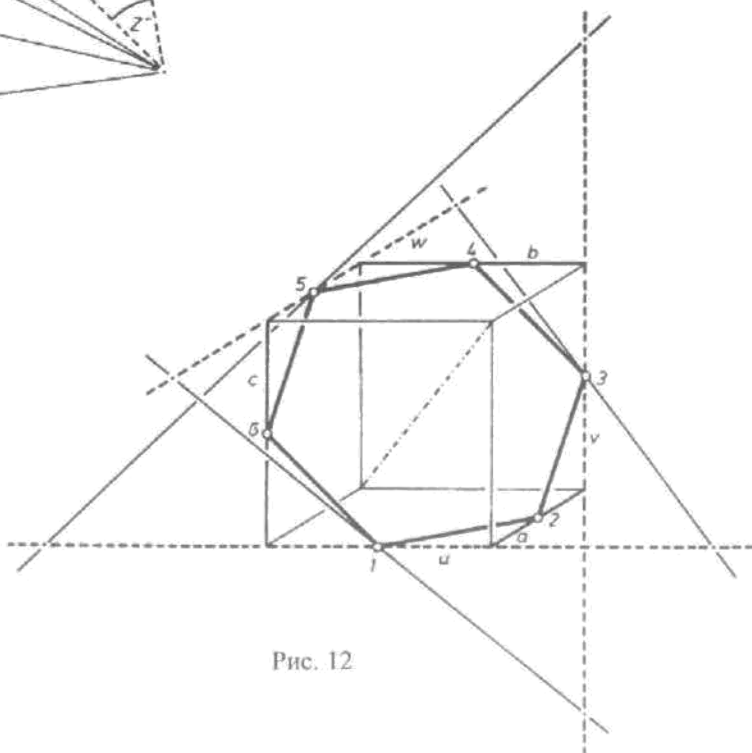


Рис. 12

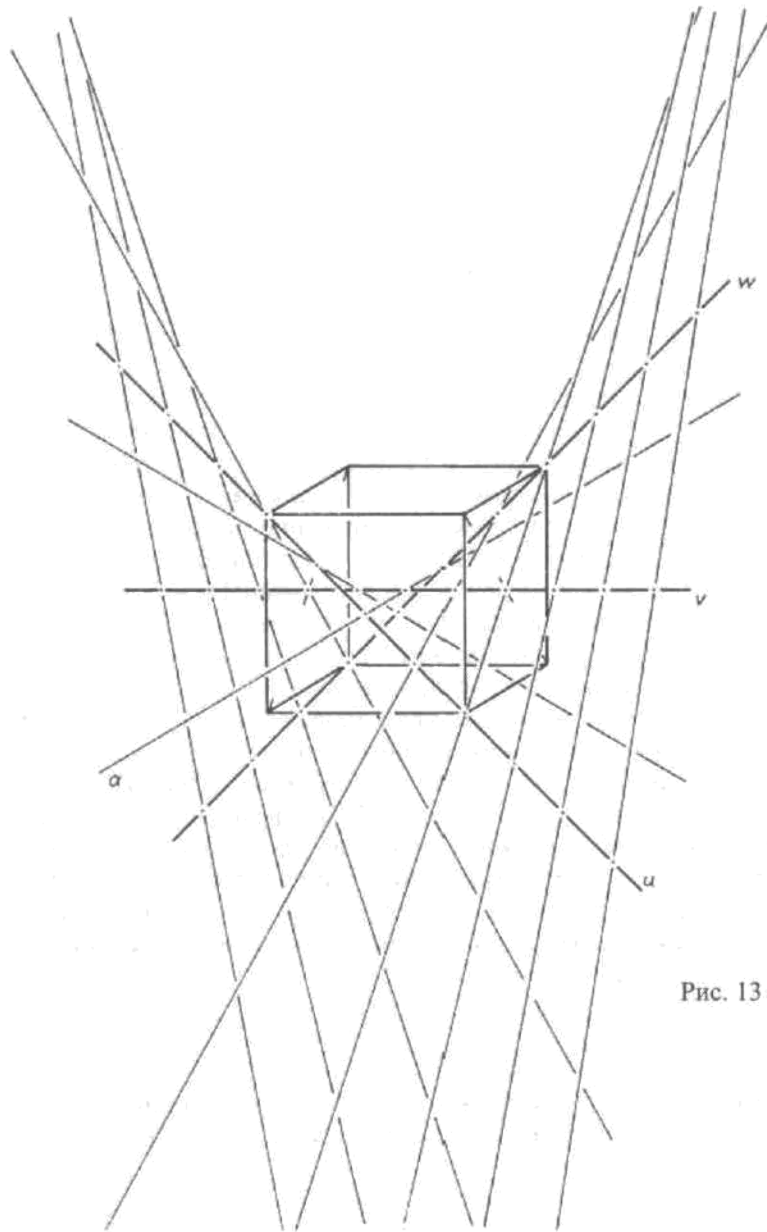


Рис. 13

ит в том, что она содержит среди прочего и одну бесконечно удаленную прямую: это прямая, проходящая через три бесконечно удаленные точки направляющих, или бесконечно удаленная прямая боковых граней. Ряд-близнец обладает точно такими же свойствами. Чтобы построить его, нужно взять в качестве направляющих плоскостную ось передней и задней граней, а также обе встречные прямые в правой и левой гранях. Гиперboloид касается бесконечно удаленной плоскости в точке пересечения обеих бесконечно удаленных прямых. В этом особом случае он называется *гиперболическим параболоидом*.

Рис. 13 может помочь нам в представлении уже упомянутой в начале главы *эллиптической конгруэнции*. Представим себе, что линейчатый ряд на рис. 13 вращается вокруг горизонтальной оси a . Каждая прямая ряда сама пробегает при этом линейчатый ряд. Прямые, находящиеся на одинаковом расстоянии слева и справа от оси, описывают один и тот же ряд. Эти линейчатые ряды лежат на гиперболоидах вращения (с осью a). Гиперболоиды, расположенные рядом с осью a , открываются вперед и назад очень медленно. Чем дальше, однако, гиперболоид отходит от оси, тем быстрее он раскрывается. Получается, что гиперболоиды располагаются внутри друг друга, — как годовые кольца внутри древесного ствола, с той лишь разницей, что последние имеют цилиндрическую форму, тогда как первые — гиперболическую. Совокупность всех этих рядов и называется *эллиптической конгруэнцией*.

Также с помощью рис. 13 мы можем составить себе представление еще об одном важнейшем множестве прямых — о так называемом *линейном комплексе*. Представьте себе, что линейчатый ряд, изображенный на рис. 13, вращается вокруг вертикальной оси (оси верхней и нижней граней). Это дает

нам множество, состоящее из ∞^2 прямых, теперь нужно еще сместить его вдоль оси. Совокупность возникших таким образом прямых будет состоять из ∞^3 элементов и называться *линейным комплексом*. Прямые линейного комплекса называются просто комплексными прямыми. Они распределены в пространстве довольно примечательным образом: в каждой плоскости находится ∞^1 комплексных прямых, причем все они проходят через одну точку, т.е. образуют пучок прямых. Двойственное утверждение: через каждую точку проходят ∞^1 комплексных прямых, все они лежат в одной плоскости, т.е. снова образуют плоский пучок. В результате каждой плоскости можно поставить в соответствие лежащую в ней точку (центр соответствующего пучка) и каждой точке можно поставить в соответствие проходящую через него плоскость (плоскость пучка). Такое парное соответствие инцидентных точек и плоскостей называется *нуль-полярностью*. Если рассмотреть в пространстве некоторую прямую g , не принадлежащую комплексу, то пересекающиеся с ней комплексные прямые образуют гиперболическую конгруэнцию, направляющей которой является g . Поскольку конгруэнция имеет еще одну образующую — g' , выходит, что комплексные прямые задают также парное соответствие на множестве прямых (g, g') . Линейный комплекс играет большую роль как в геометрии, так и в физике. (Интересующихся читателей мы отсылаем к работам Циглера, Адамса и Гшвинда). Рудольф Штейнер предлагал математикам и физикам исследовать лежащие за множеством комплексных чисел так называемые *гиперкомплексные числа* и искать специальные числа такого рода. Исследование таких чисел в настоящее время происходит. Полученные результаты позволяют предполагать, что линейные комплексы (в несколько более широком смысле) являются такими же отпечатками гиперкомплексных чисел в действительной области, каковыми являются эллиптические инволюции для комплексных чисел (Гшвинд). В физике линейные комплексы возникают, например, в механике (Адамс): если на некоторое твердое тело воздействуют силы, то найдутся прямые, вокруг которых вращательный момент равен нулю. Эти прямые называются нуль-прямыми. Совокупность всех нуль-прямых всегда является линейным комплексом. Если твердое тело произвольным образом движется в пространстве, то в каждый момент существуют прямые, склонные к движению любого рода, только не в своем собственном направлении. Совокупность таких прямых также образует линейный комплекс. Чистое вращение вокруг оси, например, также порождает множество прямых, двигающихся не в своем собственном направлении. Это все прямые, пересекающие ось; они образуют дерево прямых (упомянутое в начале главы). Такое дерево прямых является вырожденным случаем линейного комплекса: все комплексные прямые проходят в нем через ось.

В проективной геометрии в связи с линейными комплексами в настоящее время получены самые красивые и значительные результаты.

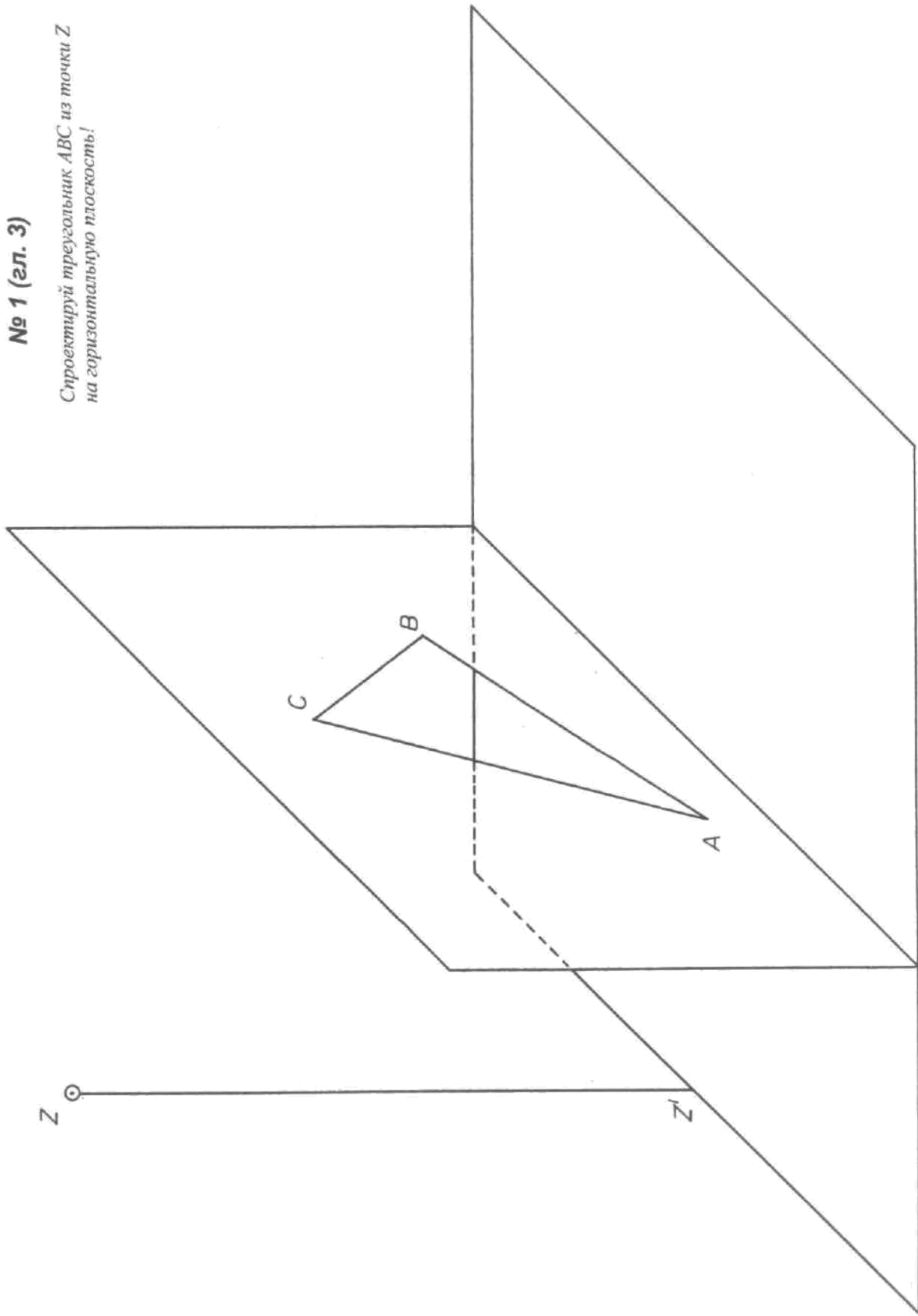
Задания

Задания являются основой для отработки материала соответствующих глав (гл.). Решать их можно прямо в книге или, воспользовавшись прозрачной бумагой, перенести условия и затем выполнить на особых листах.

Приложения

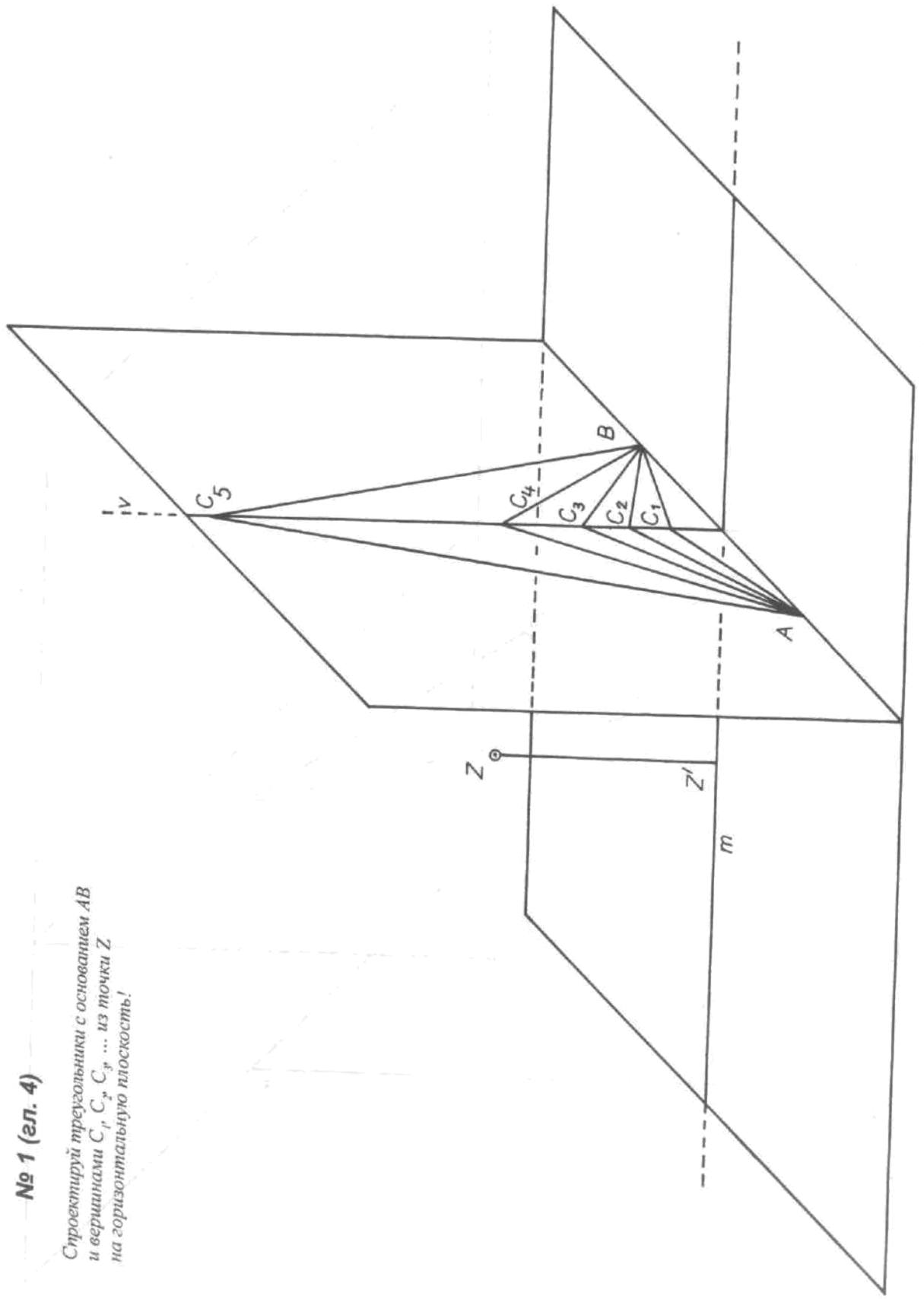
№ 1 (эл. 3)

Спроектируй треугольник ABC из точки Z на горизонтальную плоскость!



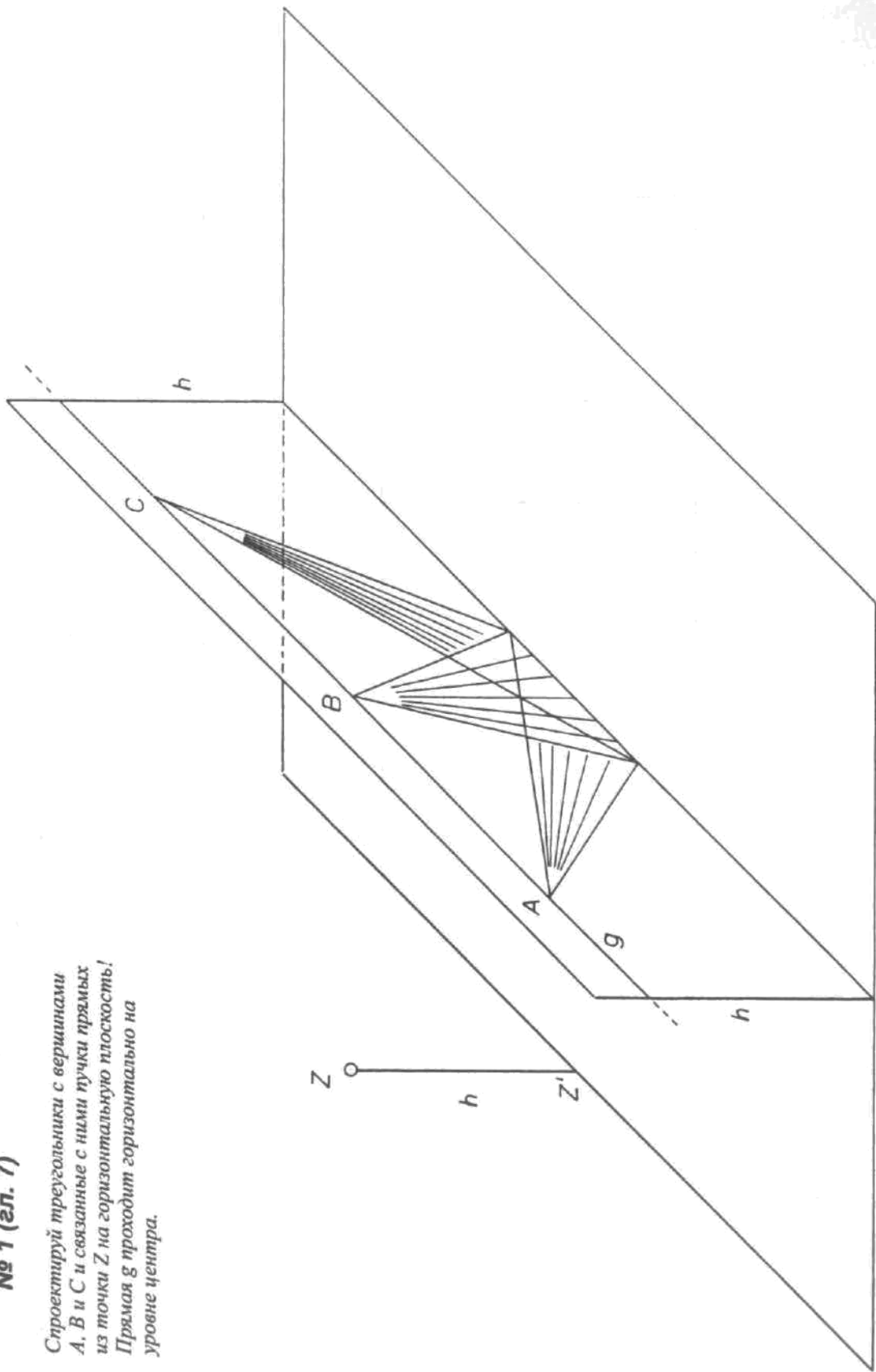
№ 1 (эл. 4)

Строю трикутник з основою AB
і вершинами C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ... із точки Z
на горизонтальну площину!



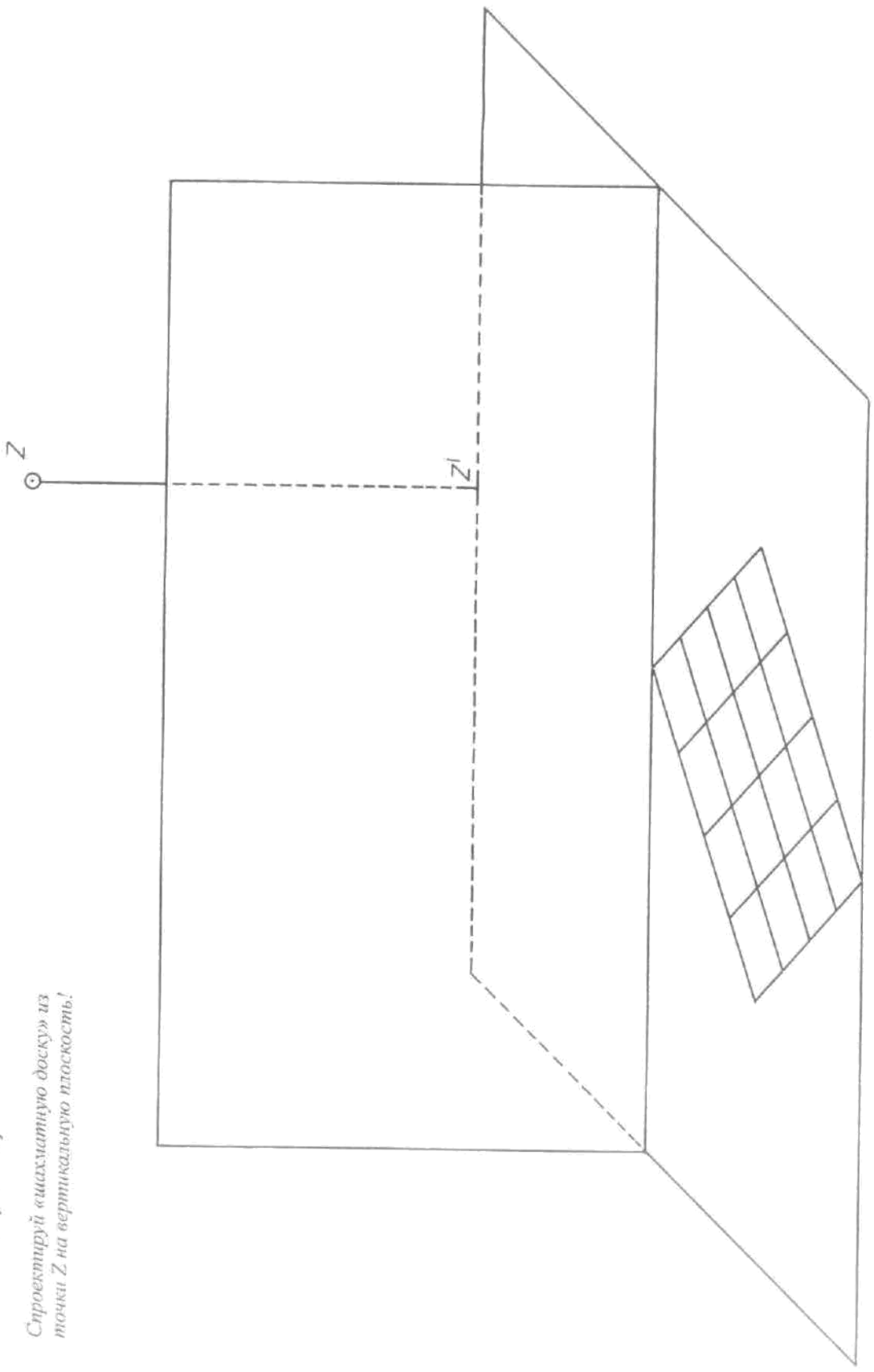
№ 1 (эл. 7)

Спроектируй треугольники с вершинами A , B и C и связанные с ними пучки прямых из точки Z на горизонтальную плоскость! Прямая g проходит горизонтально на уровне центра.



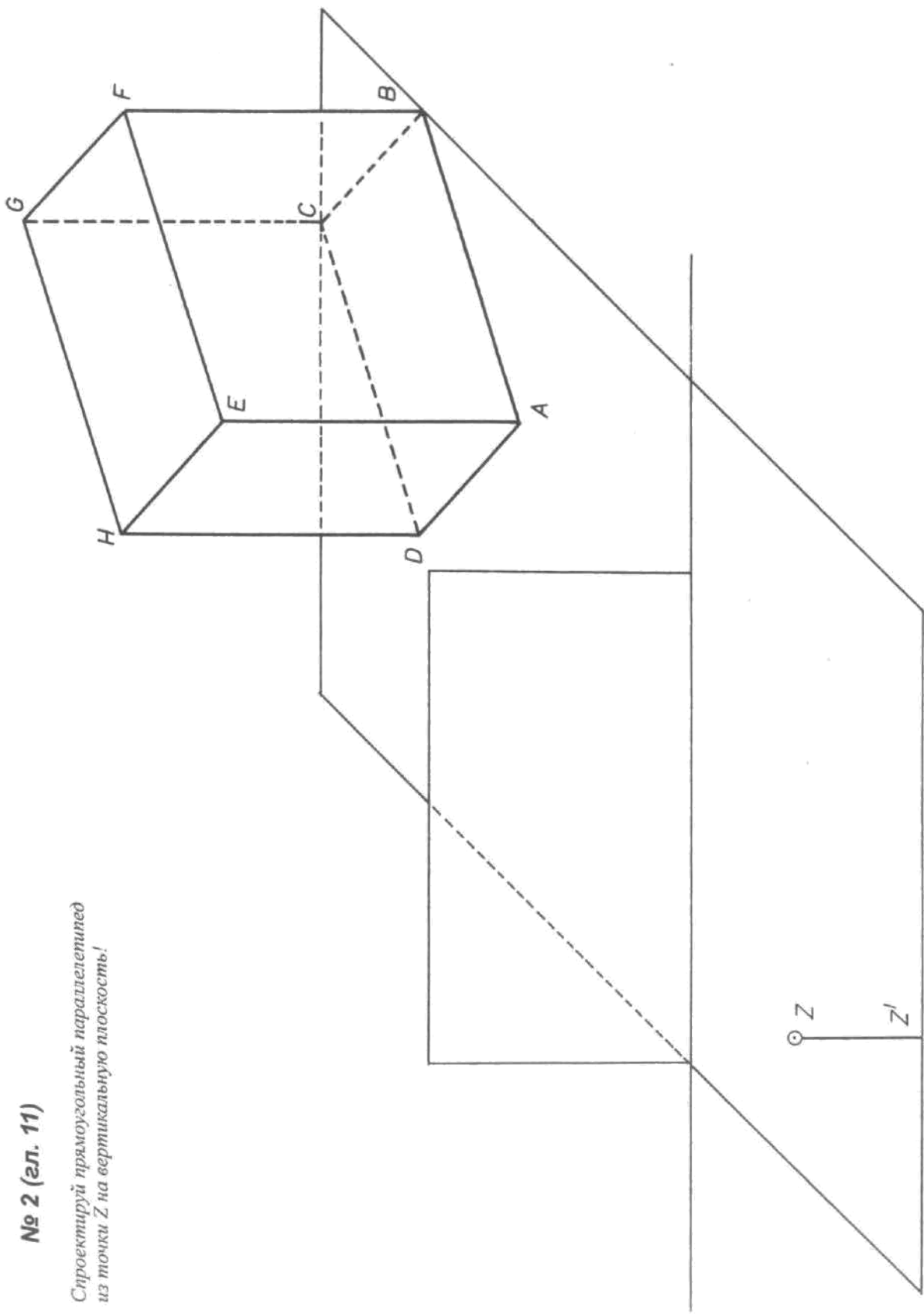
№ 1 (зл. 11)

Спроектируй «шахматную доску» из точки Z на вертикальную плоскость!



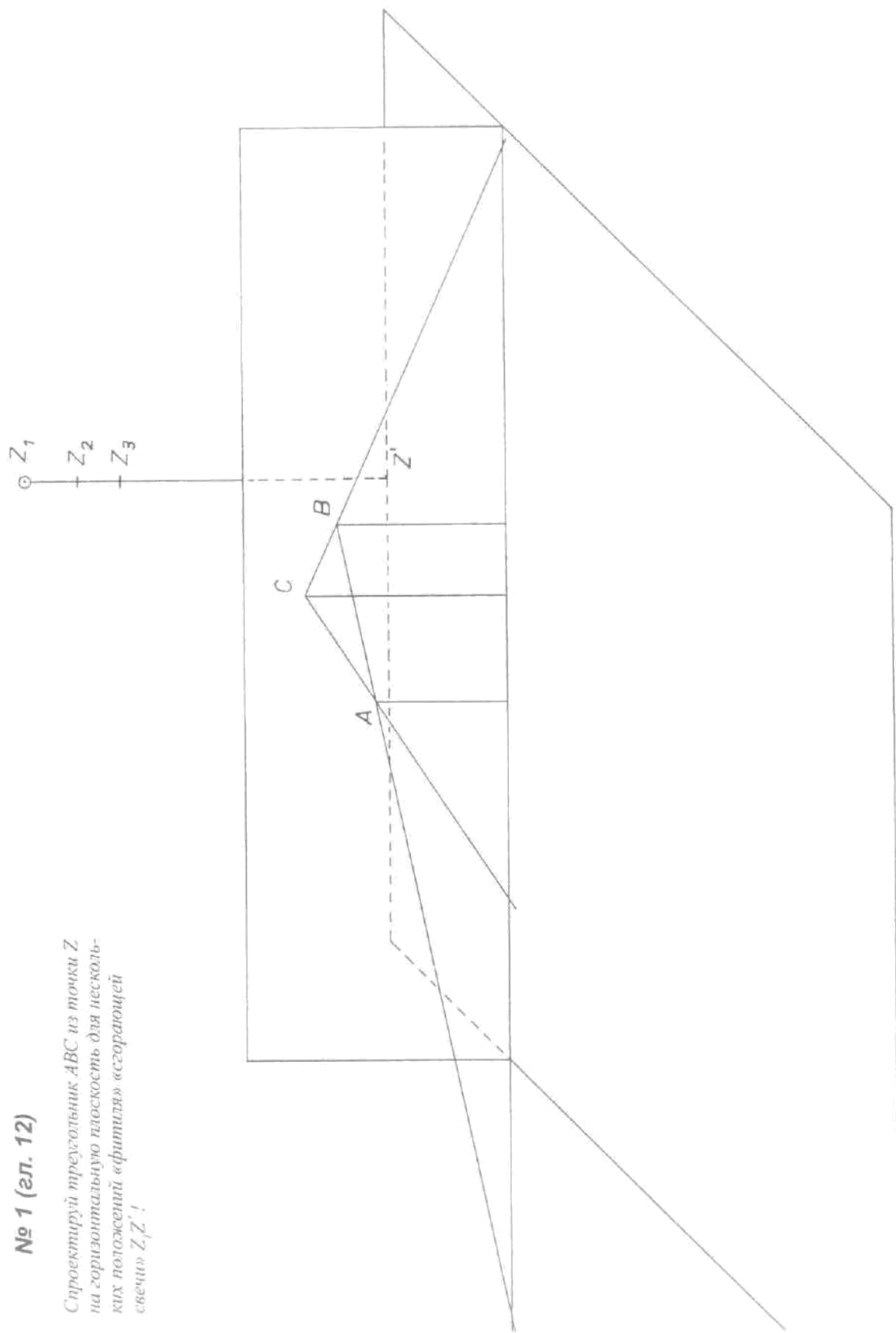
№ 2 (эл. 11)

Стройте параллельный прямоугольный параллелепипед из точки Z на вертикальную плоскость!



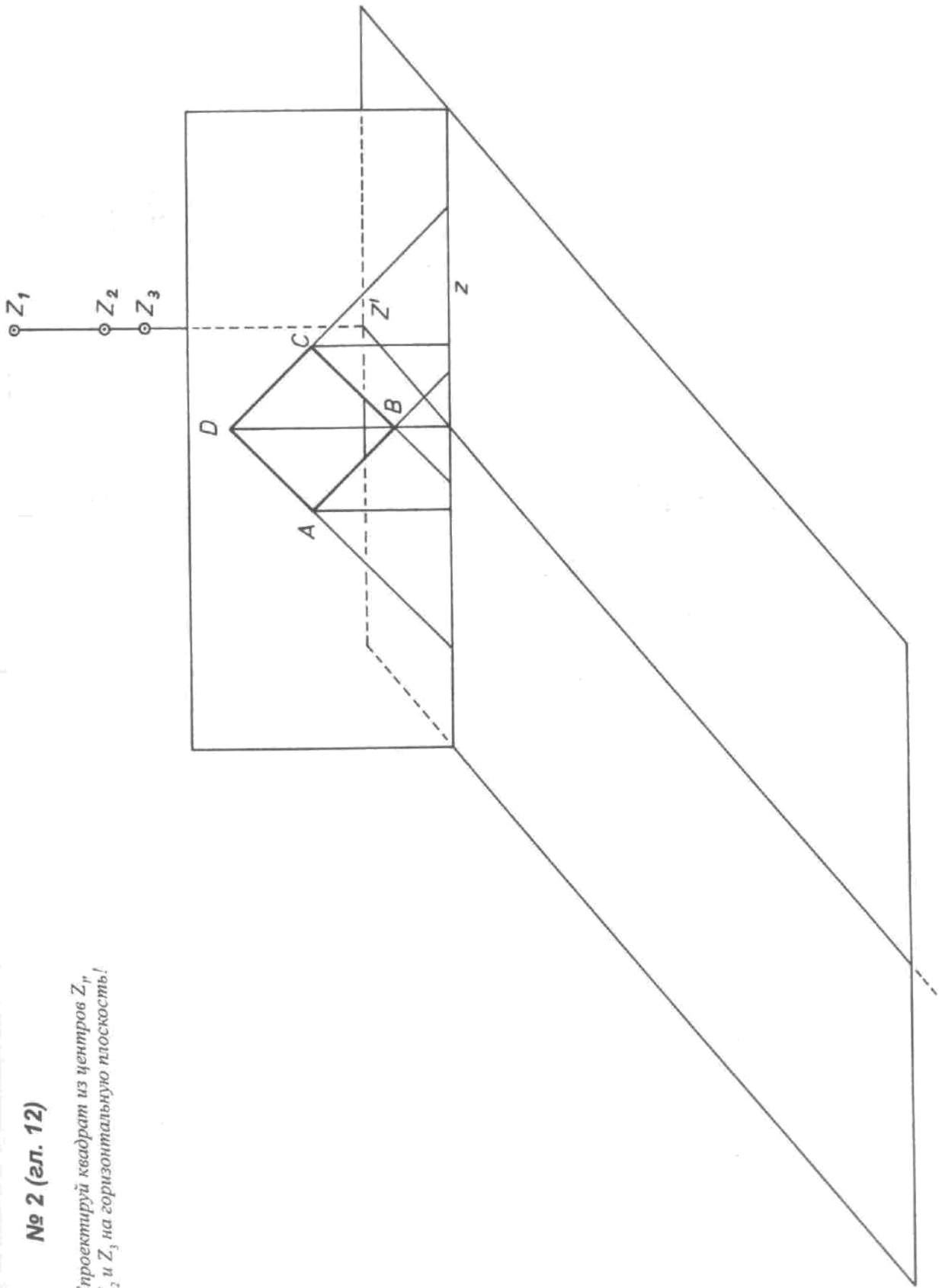
№ 1 (эл. 12)

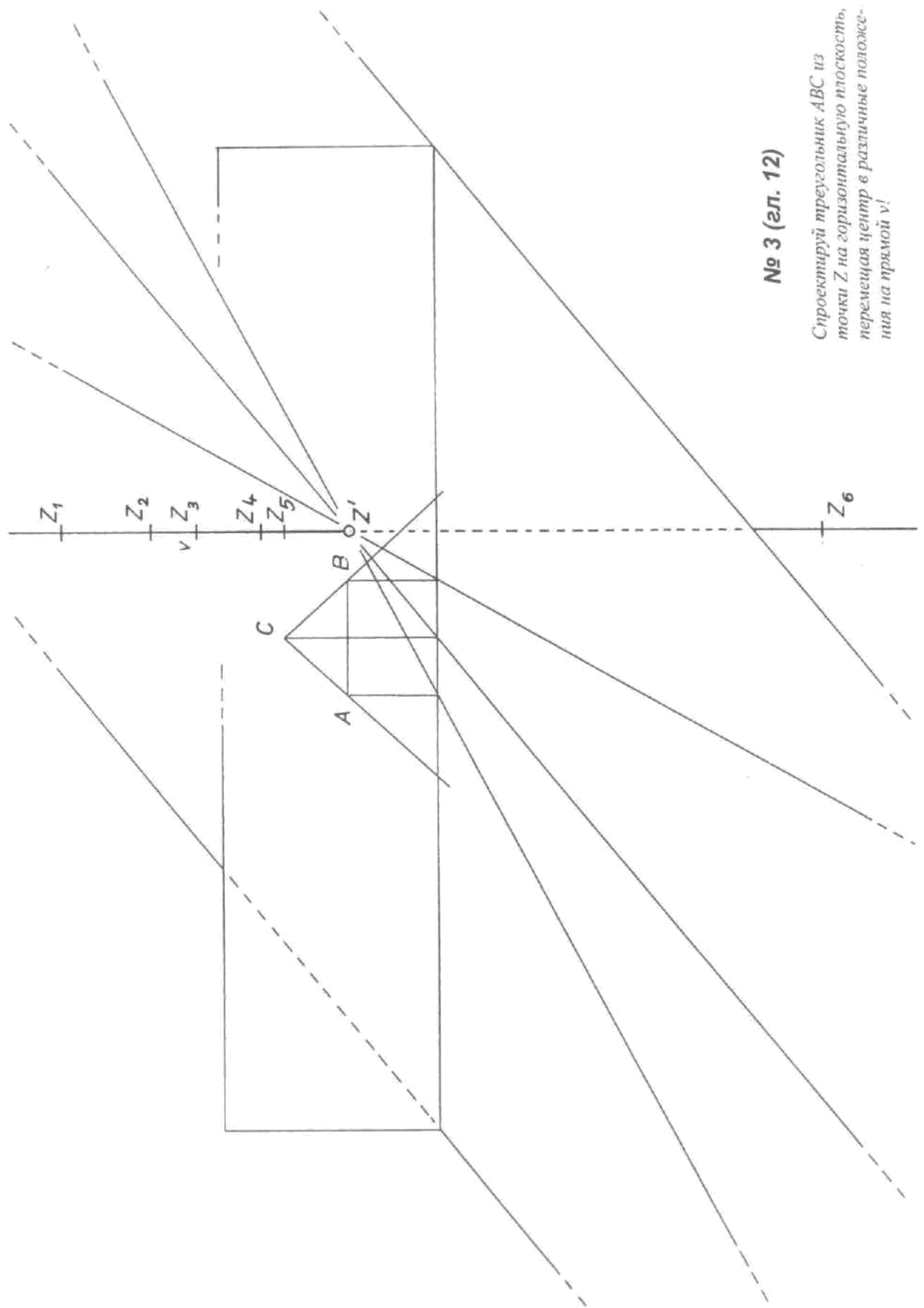
Спроектируй треугольник ABC из точки Z на горизонтальную плоскость для нескольких положений «фитиля» «сгорающей свечи» Z_1, Z_2, Z_3 !



№ 2 (эл. 12)

Спроектируй квадрат из центров Z_1 , Z_2 и Z_3 на горизонтальную плоскость!



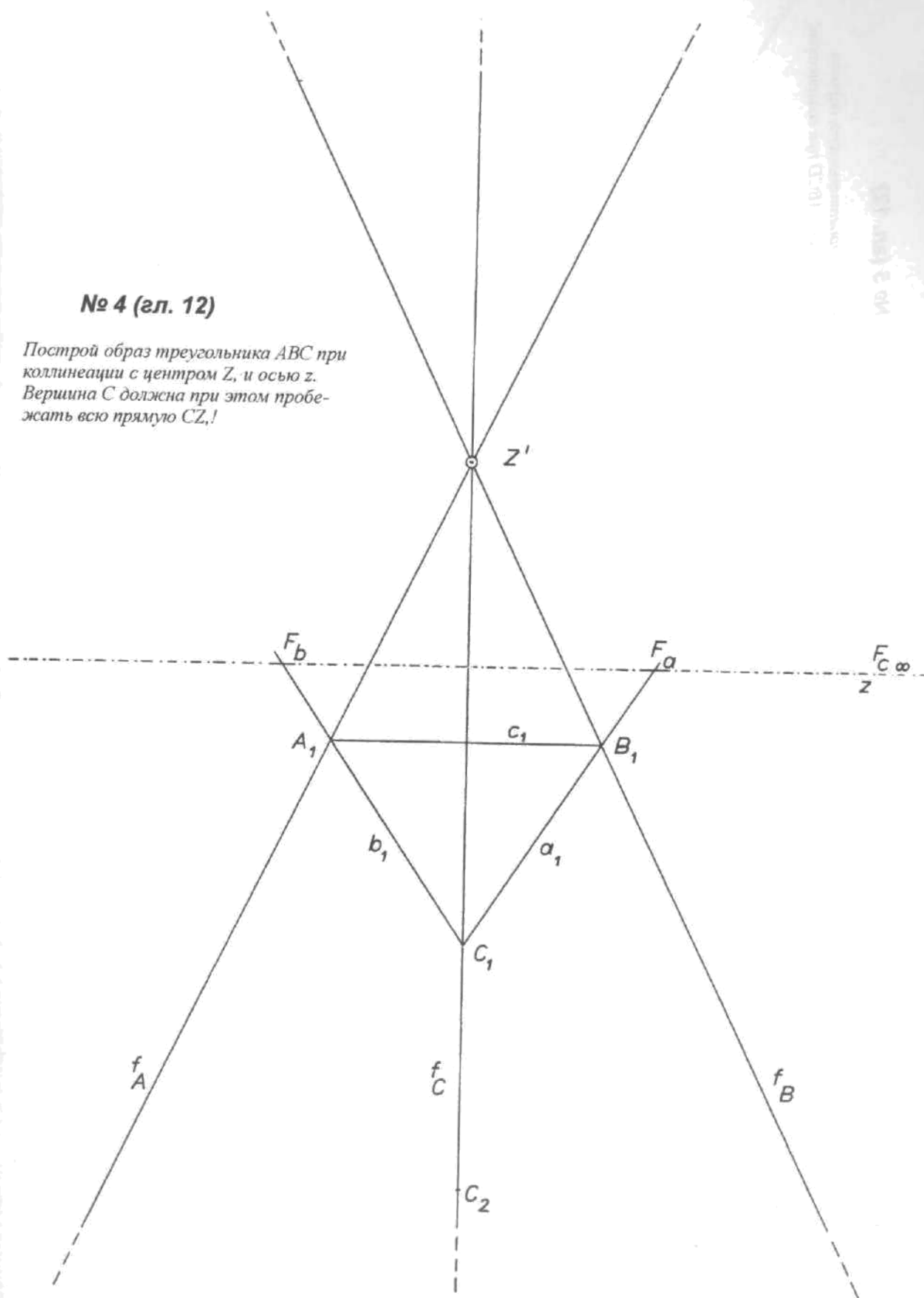


№ 3 (эл. 12)

Спроектируй треугольник ABC из точки Z на горизонтальную плоскость, перемещая центр в различные положения на прямой v !

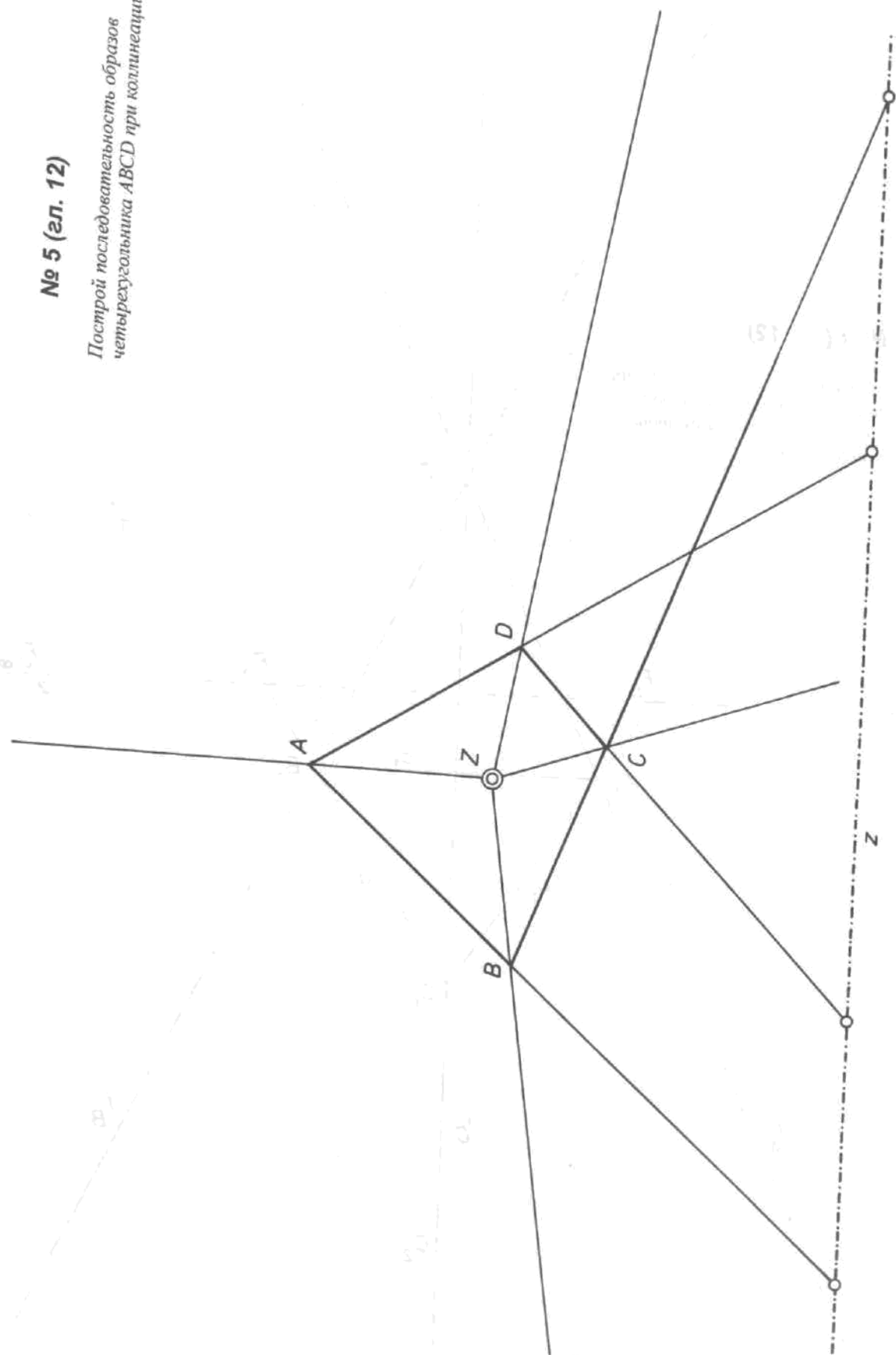
№ 4 (гл. 12)

Построй образ треугольника ABC при коллинеации с центром Z , и осью z . Вершина C должна при этом пробежать всю прямую CZ !



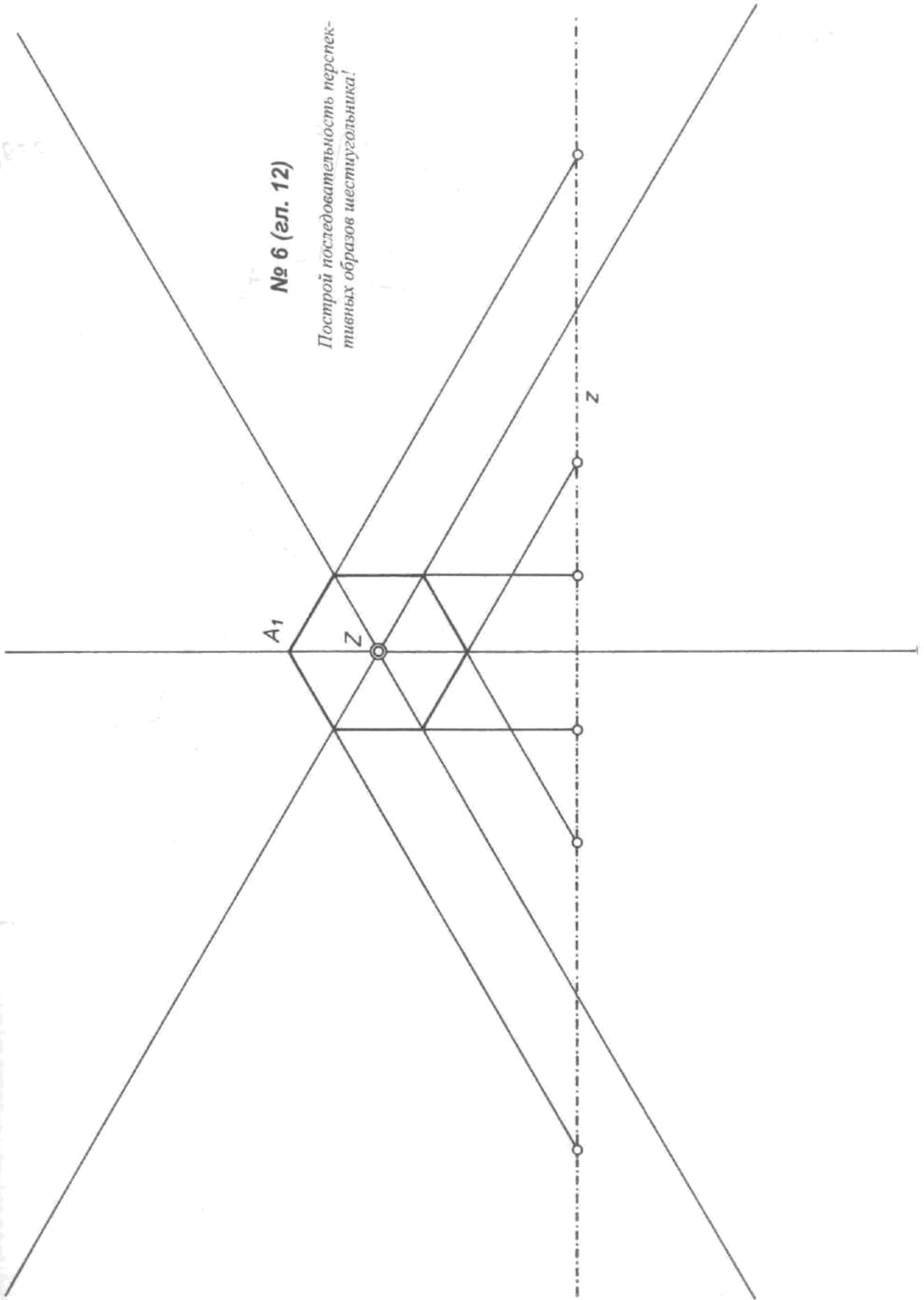
№ 5 (эл. 12)

Построй последовательность образов
четырёхугольника ABCD при коллинеации.



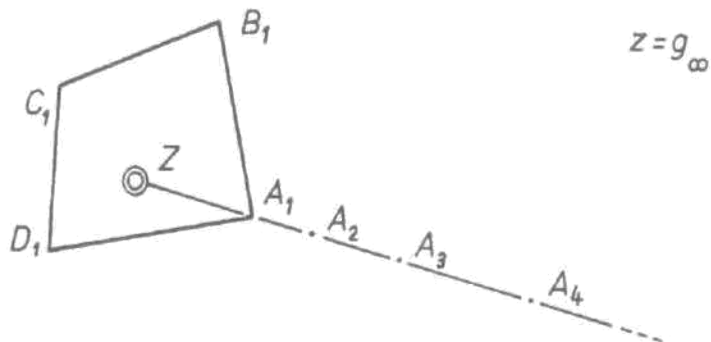
№ 6 (эл. 12)

Построй последовательность перспективных образов шестиугольника!

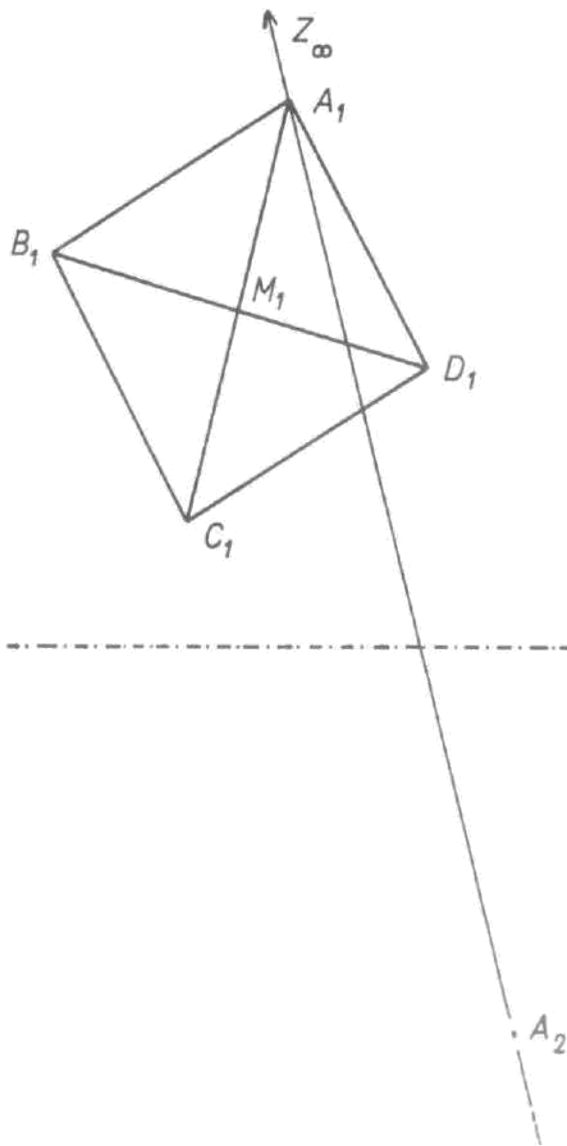


№ 1 (гл. 15)

А.1) Пусть осью z будет бесконечно удаленная прямая. Построй образы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ при перспективных коллинеациях! Вершина A выполняет роль инициатора преобразования и переходит последовательно в положения A_2, A_3, A_4, \dots

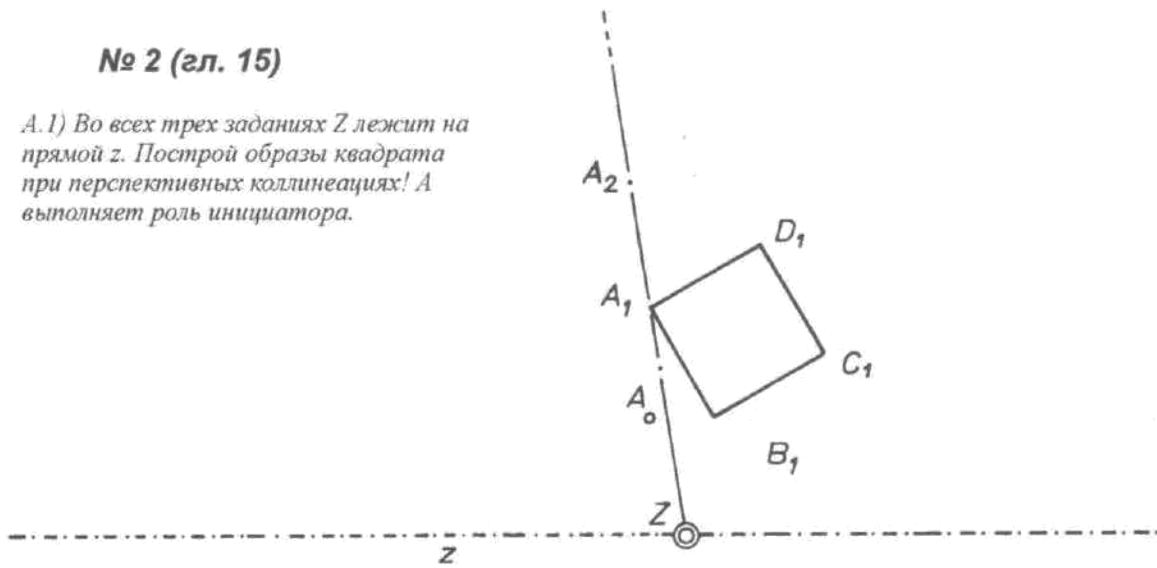


А.2) Пусть Z лежит бесконечно далеко в заданном направлении. Точка A перепрыгивает из положения A_1 в положение A_2 .

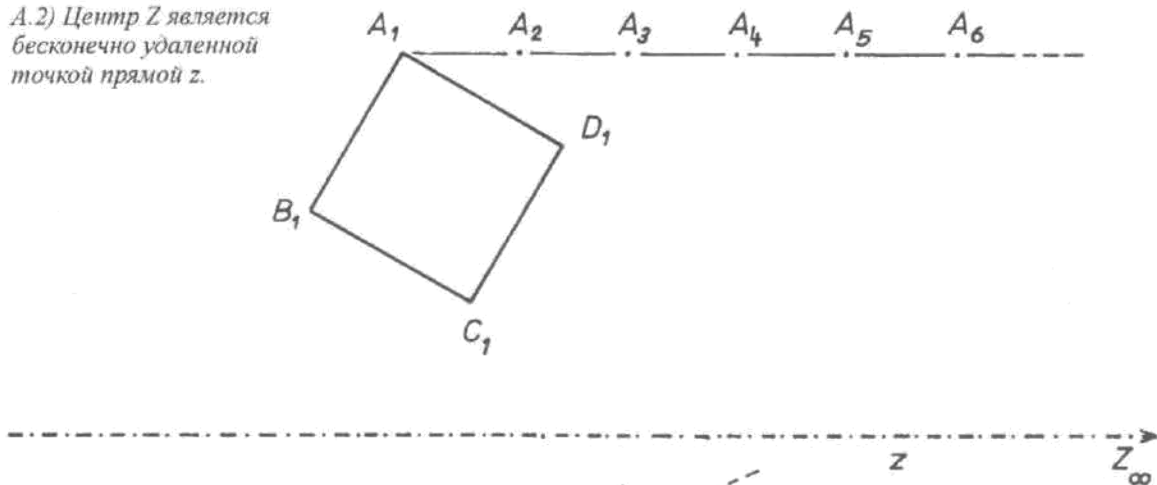


№ 2 (гл. 15)

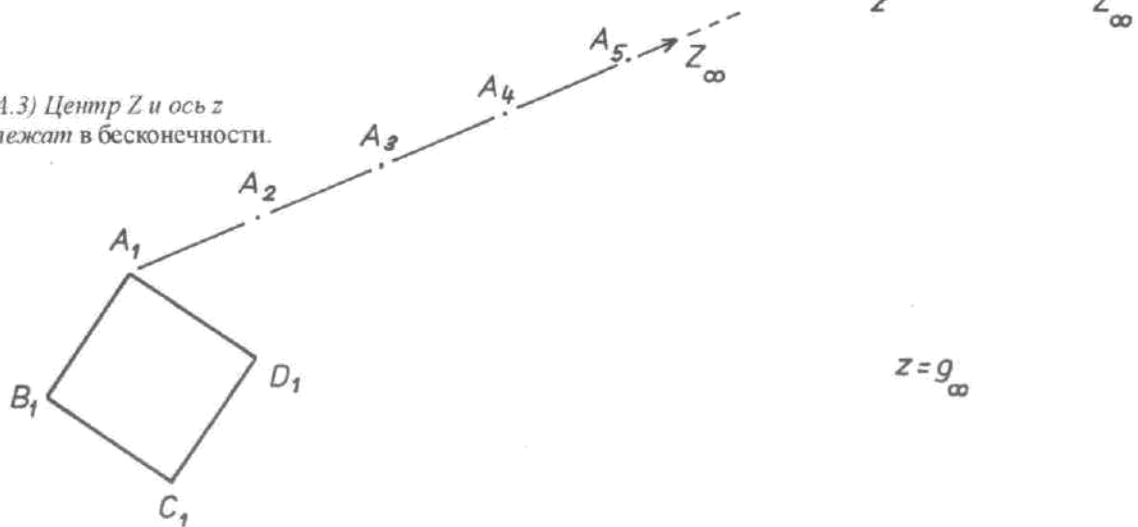
А.1) Во всех трех заданиях Z лежит на прямой z . Построй образы квадрата при перспективных коллинеациях! A выполняет роль инициатора.



А.2) Центр Z является бесконечно удаленной точкой прямой z .

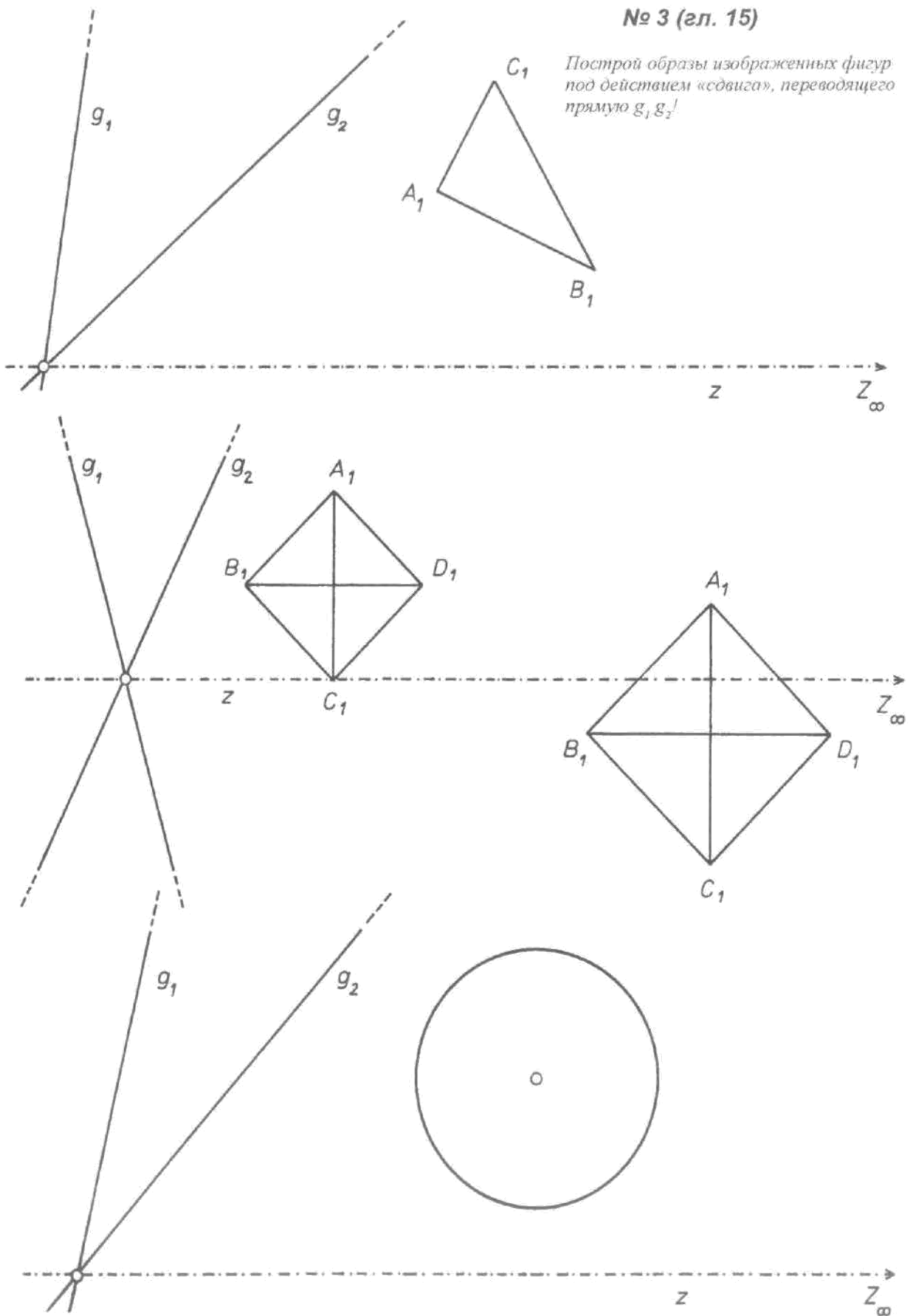


А.3) Центр Z и ось z лежат в бесконечности.



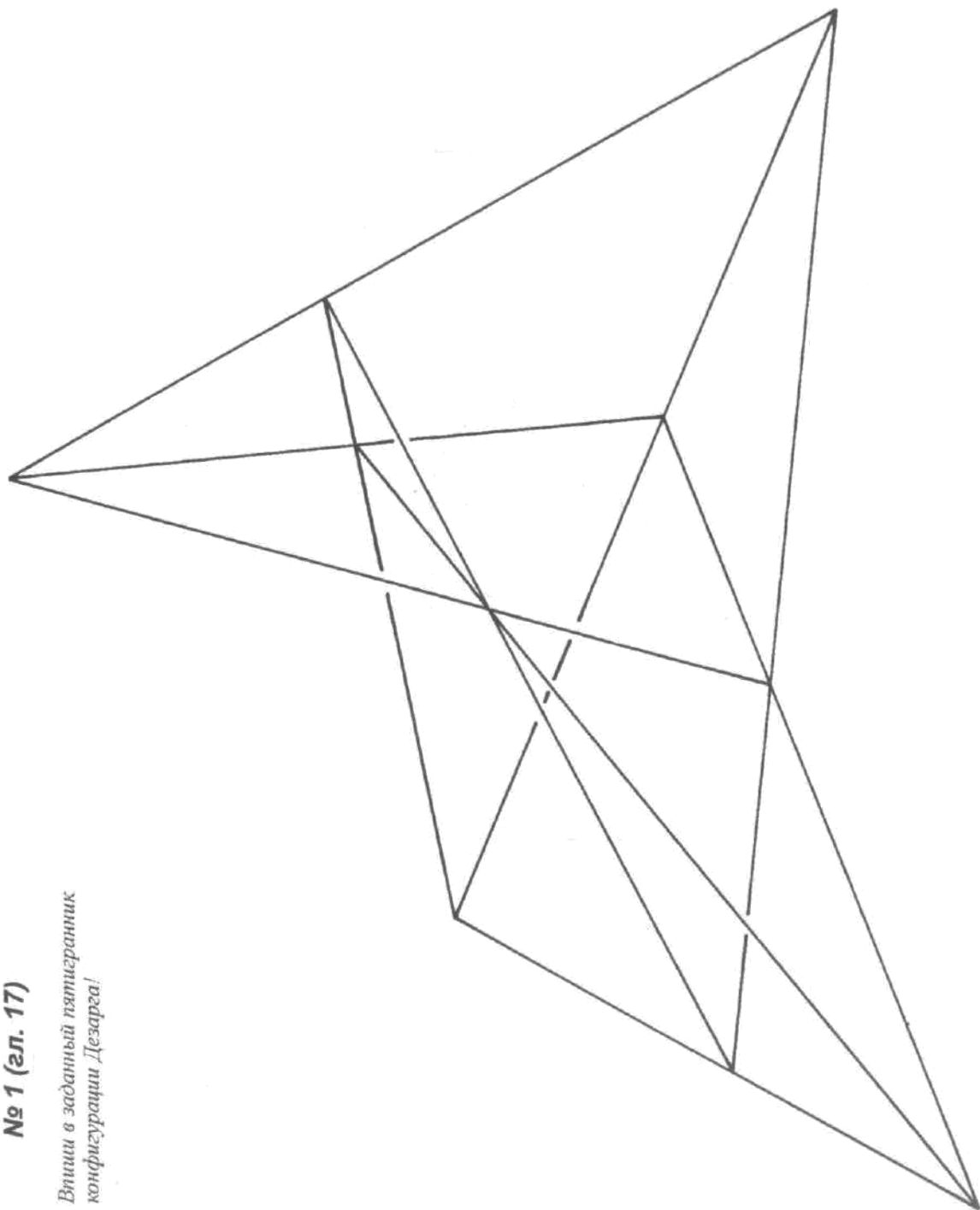
№ 3 (гл. 15)

Построй образы изображенных фигур под действием «сдвига», переводящего прямую $g_1 g_2$



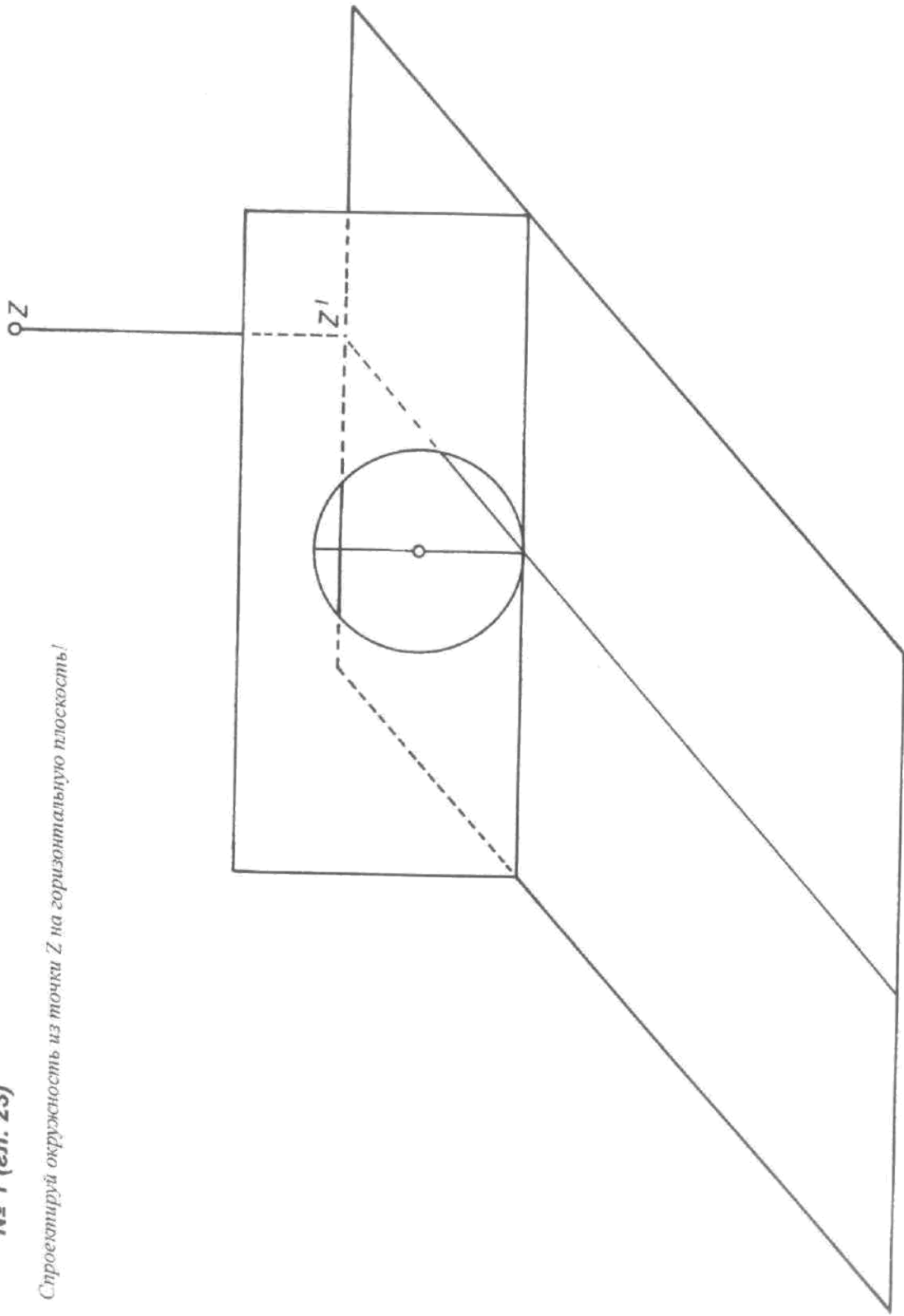
№ 1 (зл. 17)

*Виды в заданный пятигранник
конфигурации Дезарга!*



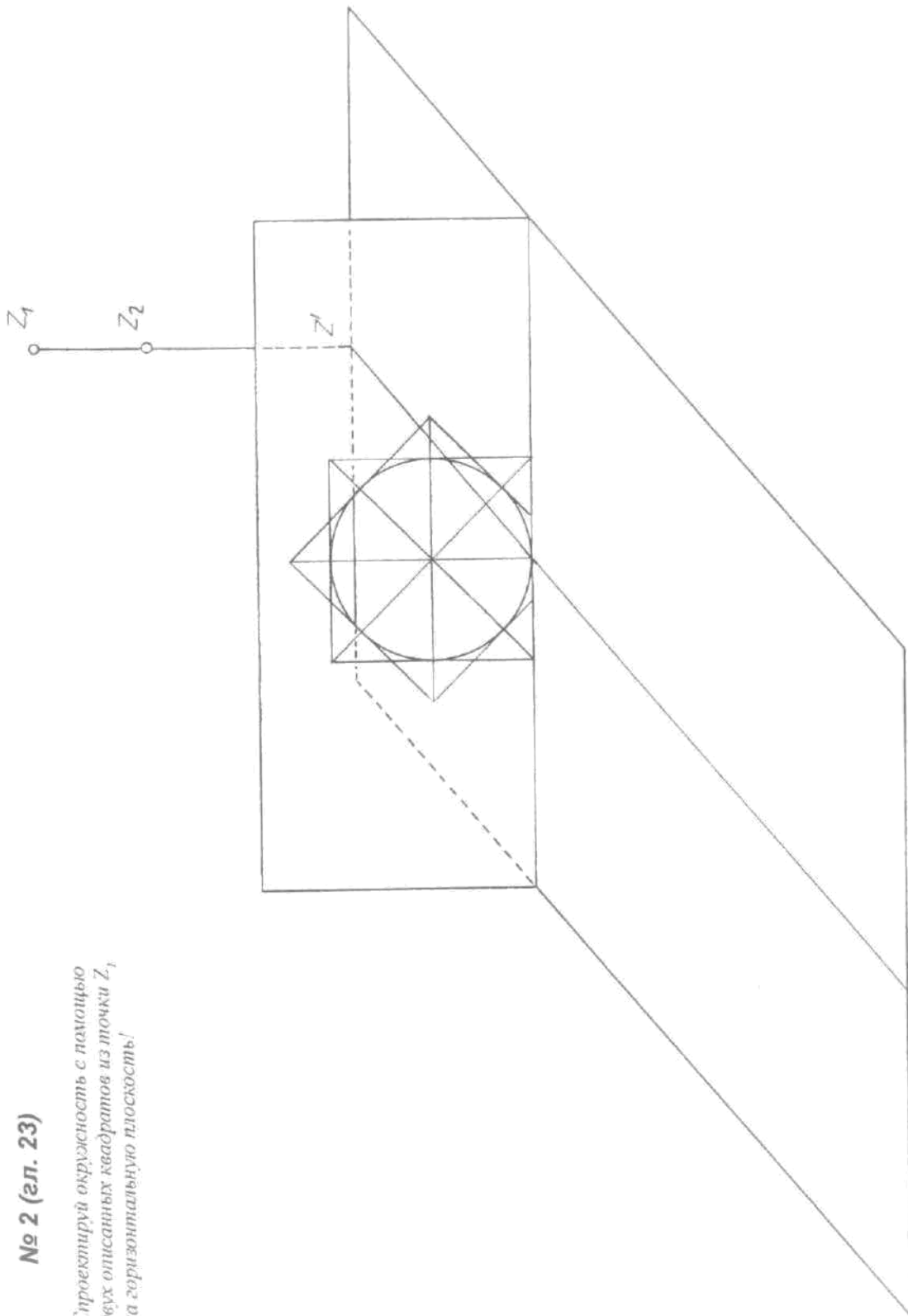
№ 1 (эл. 23)

Спроектируйте окружность из точки Z на горизонтальную плоскость!



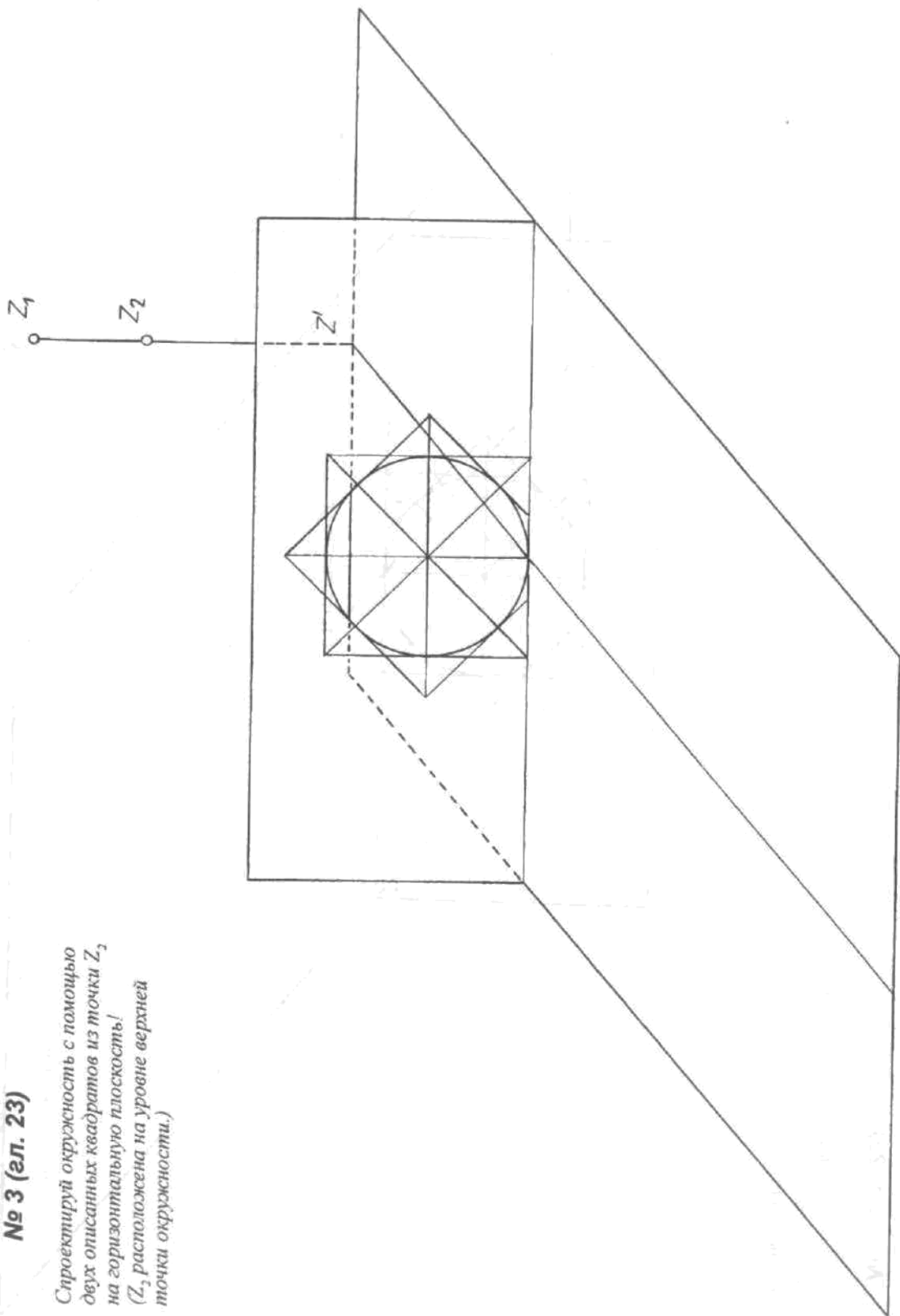
№ 2 (эл. 23)

*Спроектируй окружность с помощью
двух описанных квадратов
из точки Z_1
на горизонтальную плоскость!*



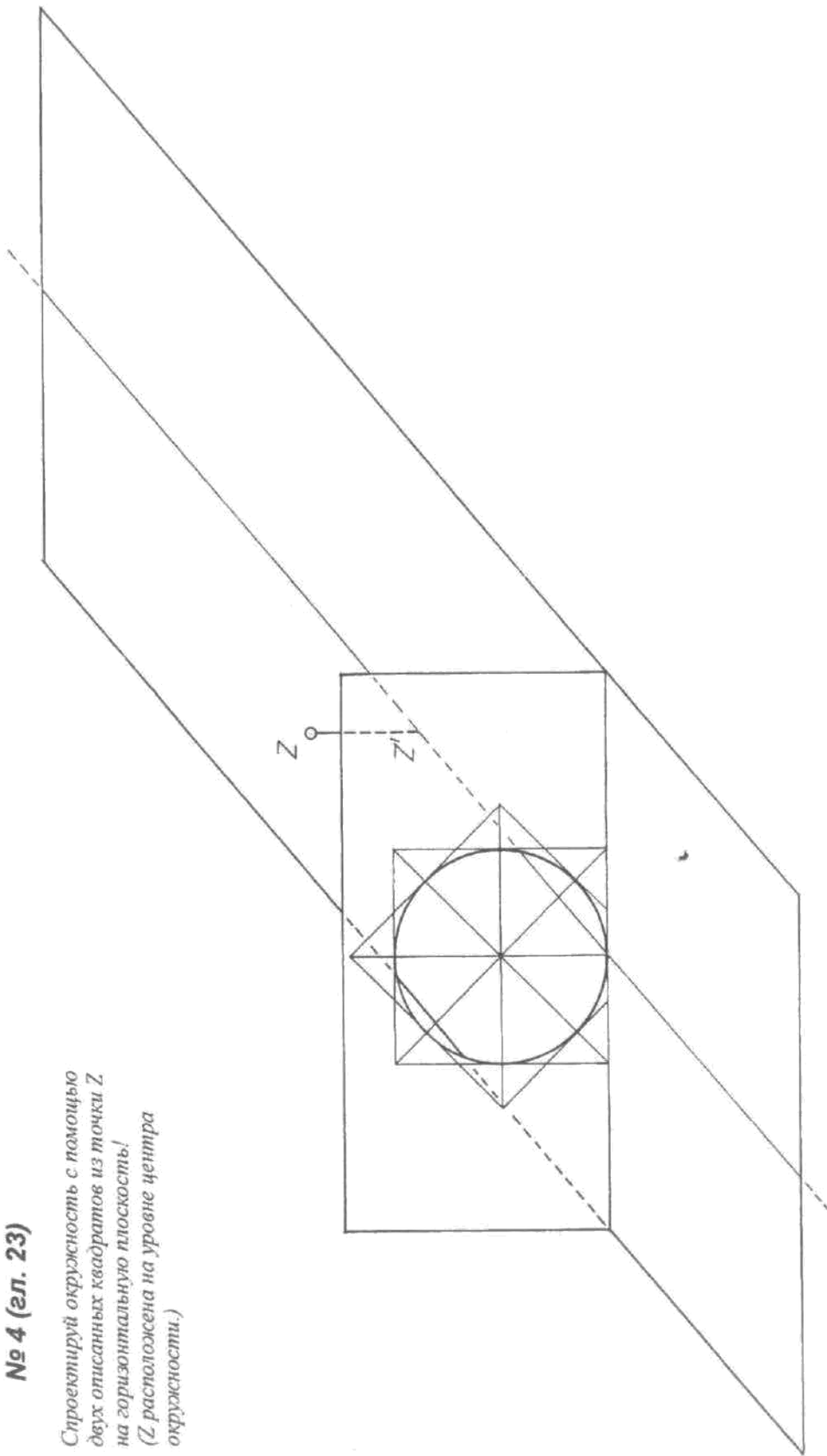
№ 3 (эл. 23)

Спроектируй окружность с помощью
двух описанных квадратов из точки Z_2
на горизонтальную плоскость!
(Z_1 расположена на уровне верхней
точки окружности.)



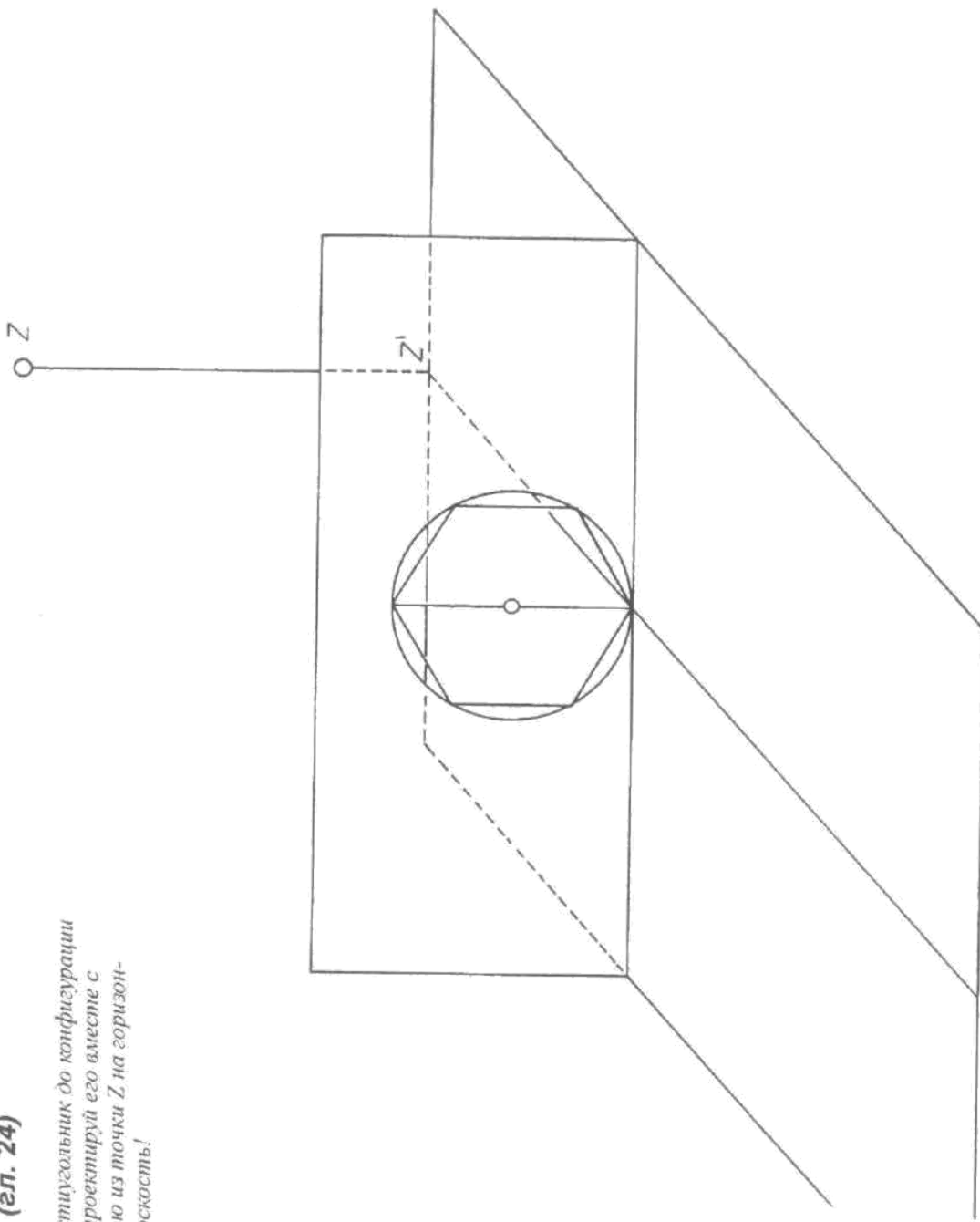
№ 4 (эл. 23)

Спроектируй окружность с помощью
двух описанных квадратов
на горизонтальную плоскость!
(Z расположена на уровне центра
окружности.)



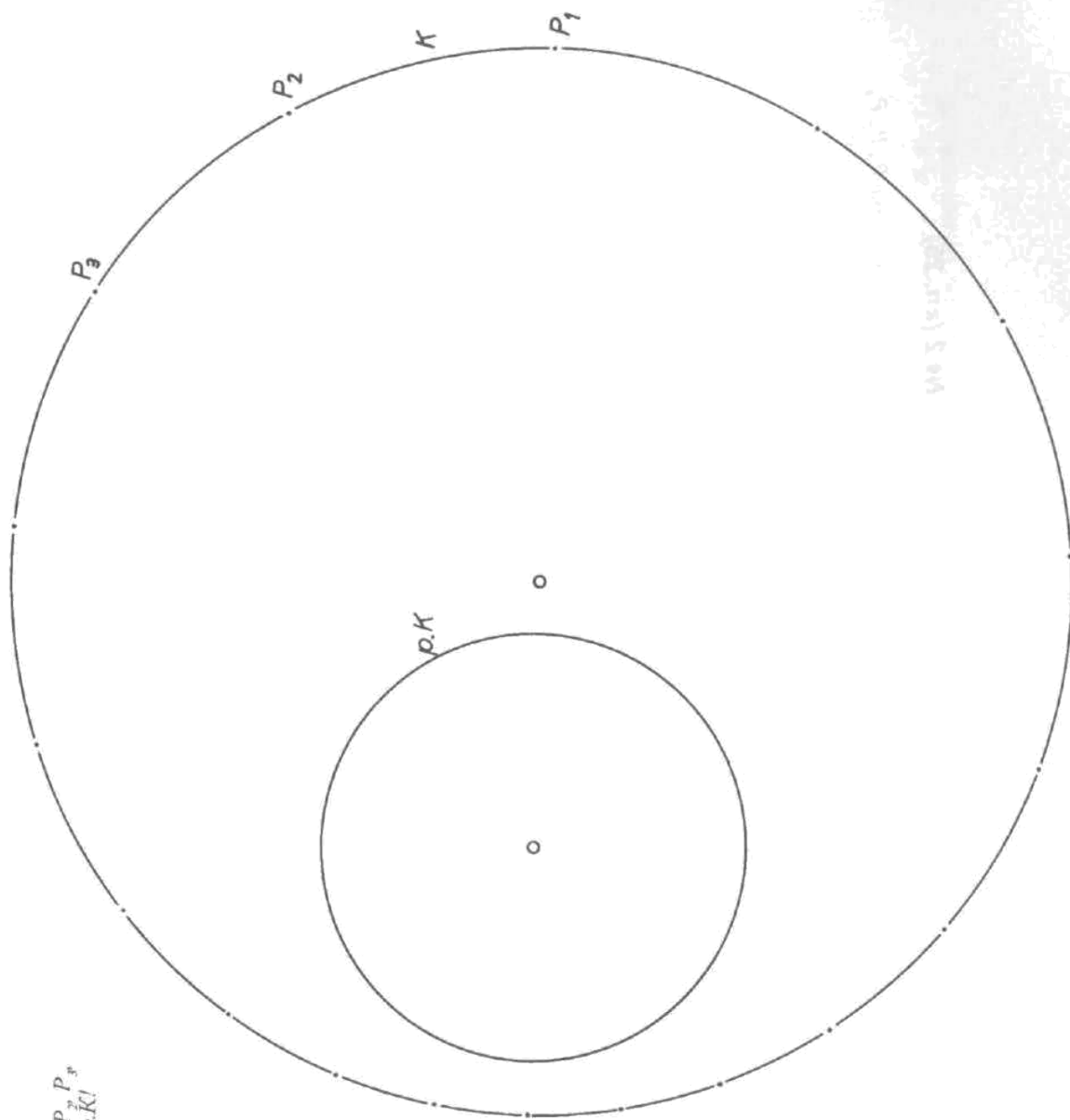
№ 1 (эл. 24)

Дополни шестиугольник до конфигурации Паскаля и проектируй его вместе с окружностью из точки Z на горизонтальную плоскость!



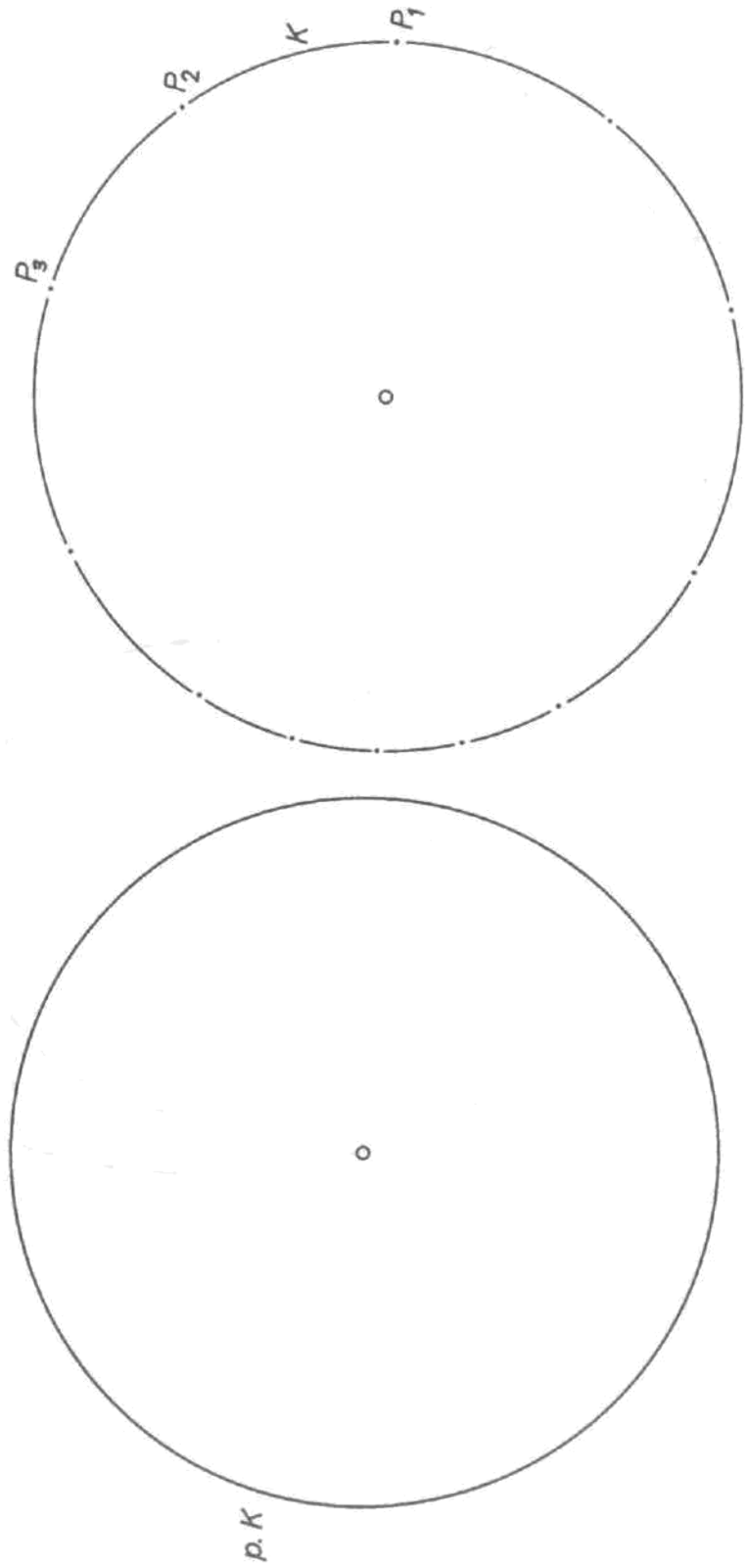
№ 1 (зл. 25)

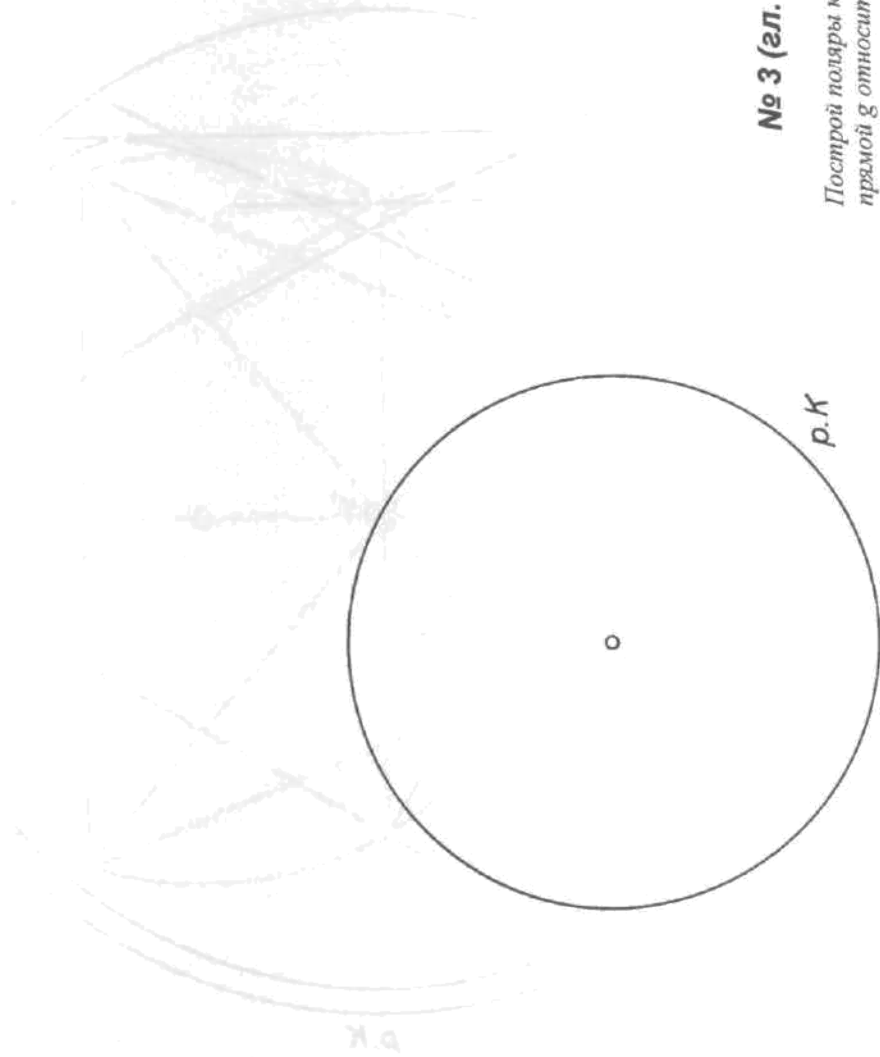
Построй полярны к точкам P_1, P_2, P_3
... относительно окружности $p.K!$



№ 2 (эл. 25)

Построй полярные к точкам P_1, P_2, P_3
... окружности K относительно
окружности $p.K$



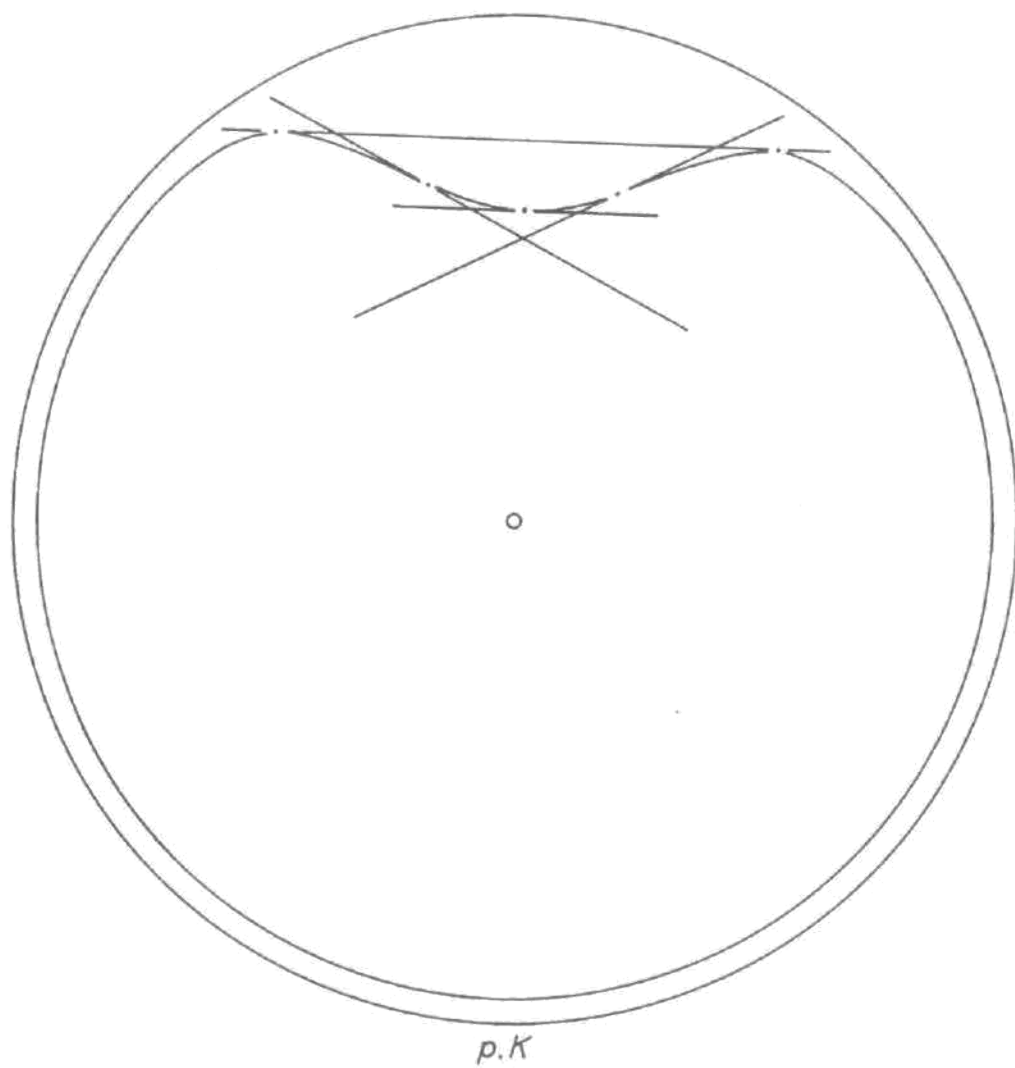


№ 3 (зл. 25)

Построй поляр к точкам P_{-r} , P_r , P_{-r} , P_r ...
прямой g относительно окружности $r.K$!

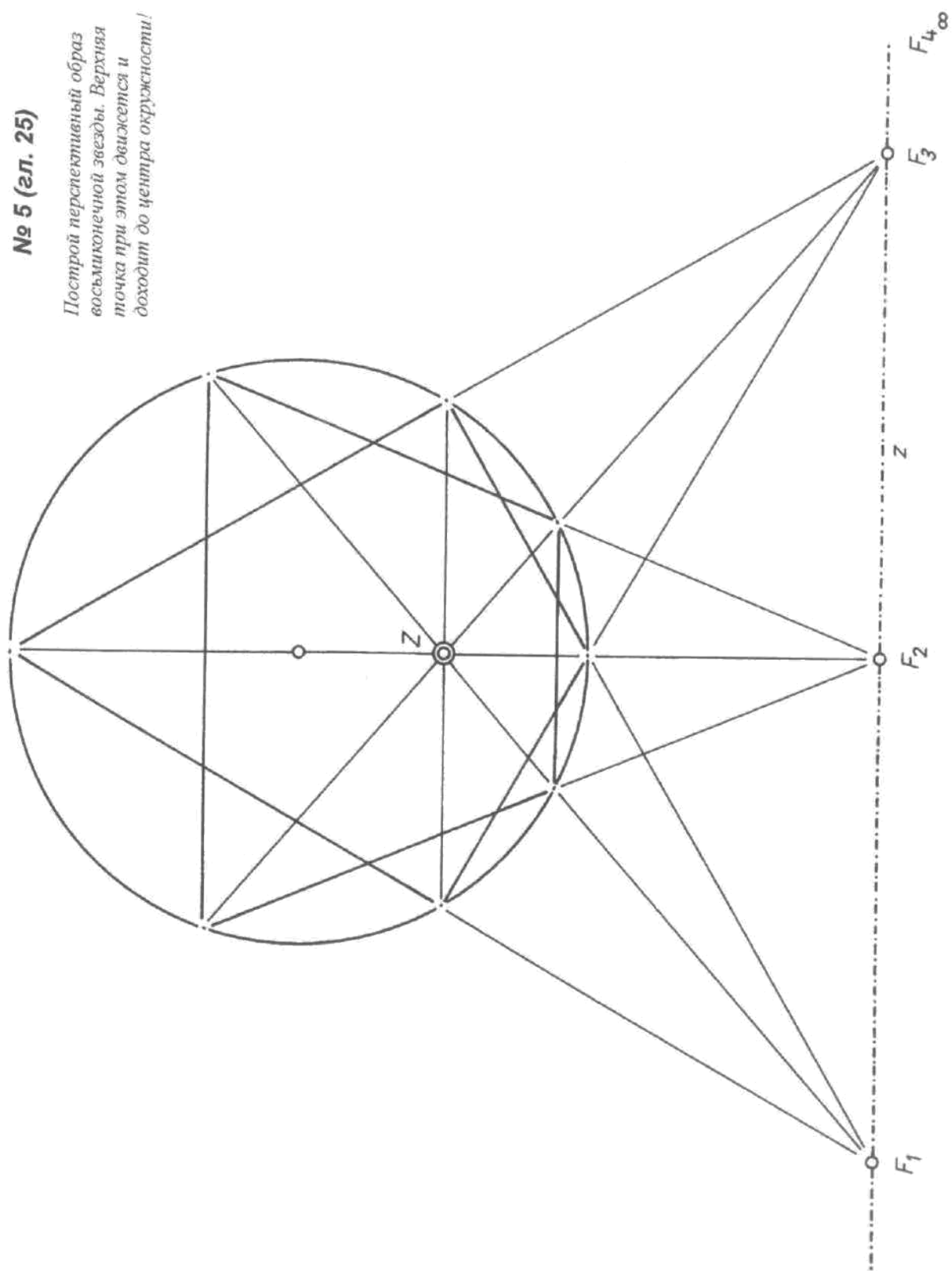
№ 4 (гл. 25)

Поляризуй заданную кривую относительно окружности $p.K$!



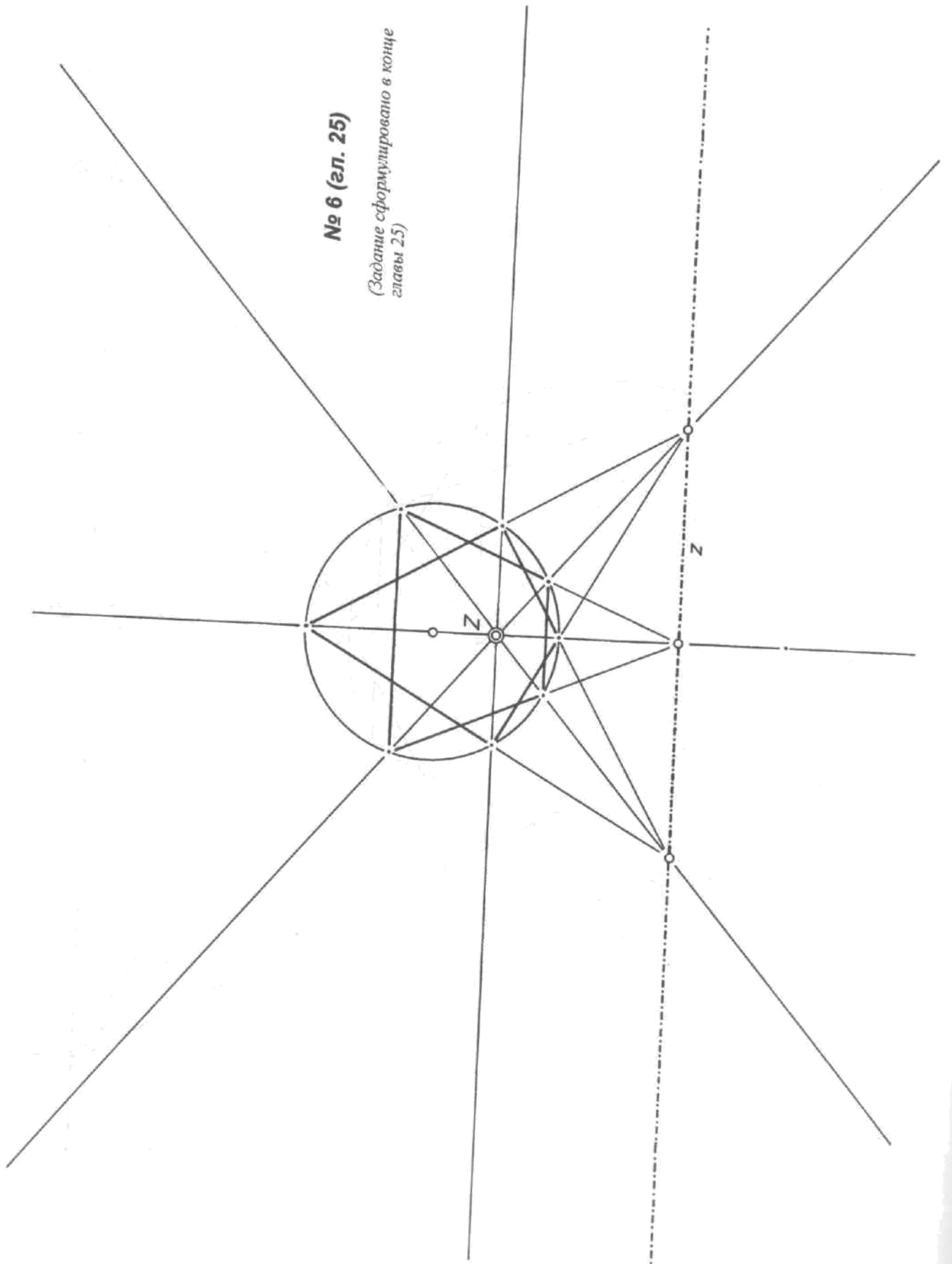
№ 5 (гл. 25)

Построй перспективный образ
восьмиконечной звезды. Верхняя
точка при этом движется и
доходит до центра окружности!



№ 6 (гл. 25)

(Задание сформулировано в конце главы 25)



Список литературы

Подготовительная литература общегеометрического содержания

- BINDEL, ERNST:** Die Kegelschnitte. Stuttgart 1963.
— Harmonien im Reiche der Geometrie. Stuttgart 1964.
— Logarithmen für jedermann. 3. Auflage Stuttgart 1983.
BARAVALLE, HERMANN VON: Geometrie als Sprache der Form. 3. Auflage Stuttgart 1980.
— Darstellende Geometrie nach dynamischer Methode. Freiburg i. Br. 1959.
— Perspektive. Bern 1952.
KELLER-VON ASTEN, HEIDI: Begegnungen mit dem Unendlichen. Dornach 1970.
— ... und Form tritt in Erscheinung. Dornach 1971.
— Wandlungen. Dornach 1980.
LOCHER-ERNST, LOUIS: Urphänomene der Geometrie. 2. Auflage Dornach 1980.
UNGER, GEORG: Das offenbare Geheimnis des Raumes. 2. Auflage Stuttgart 1975.

Основополагающие работы по проективной геометрии

- ADAMS, GEORGE:** Strahlende Weltgestaltung. 2. Auflage Dornach 1965.
LOCHER-ERNST, LOUIS: Projektive Geometrie. 2. Auflage Dornach 1980.
— Raum und Gegenraum. 2. Auflage Dornach 1970.
REYE, THEODOR: Geometrie der Lage, Erste Abteilung. 5. Auflage Leipzig 1909.
WHICHER, OLIVE: Projektive Geometrie. Stuttgart 1970.

Дополнительная литература

- BERNHARD, ARNOLD:** Schauendes Geometrisieren. Dornach 1976.
GSCHWIND, PETER: Der lineare Komplex — eine überimaginäre Zahl. Dornach 1977.
KLEIN, FELIX: Nicht-euklidische Geometrie. 2. Auflage Berlin 1968.
REYE, THEODOR: Geometrie der Lage, Zweite Abteilung. 4. Auflage Leipzig 1907.
— Geometrie der Lage, Dritte Abteilung. 4. Auflage Leipzig 1910.
ZIEGLER, RENATUS: Synthetische Liniengeometrie. Dornach 1981.

Естественно-математические работы с применением проективной геометрии

- ADAMS, GEORGE:** Universalkräfte in der Mechanik. 2. Auflage Dornach 1965.
— Von dem ätherischen Raum. 2. Auflage Stuttgart 1981.
ADAMS, GEORGE UND WHICHER, OLIVE: Die Pflanze in Raum und Gegenraum. 2. Auflage Stuttgart 1979.
EDWARDS, LAWRENCE: The Field of Form. Edinburgh 1982.
GSCHWIND, PETER: Methodische Grundlagen zu einer Projektiven Quantenphysik. Dornach 1979.
UNGER, GEORG: Vom Bilden physikalischer Begriffe.
Teil I: Mechanik und Wärmelehre. Stuttgart 1959.
Teil II: Optik und Elektrizitätslehre. Stuttgart 1961.
Teil III: Quanten, Teilchen, Relativität. Stuttgart 1967.

Арнольд Бернхардт
**Проективная
геометрия**

Перевод с немецкого и редакция **М.И. Случ**
Корректор **Б.Г. Прилипко**
Компьютерная верстка **Е.В. Бабыкина, И.В. Орлова**
Оформление обложки **И.В. Орлова**

Лицензия ЛР № 030402 от 23.06.97 г.

Формат 60x84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 23. Гарнитура «Таймс». Тираж 500 экз.

Издательство «Парсифаль»
Московского Центра вальдорфской педагогики
113093, Москва, Стремянный пер., д. 33/35
тел. (007-095) 236-52-14
факс: (007-095) 236-54-92

Заказ 3439—03.

Отпечатано с готовых пленок заказчика
в 12 Центральной типографии МО РФ.
119019, г. Москва, Староваганьковский пер., д. 17.
тел.: 203-93-85

Кто бы вы ни были, школьник, учитель или просто интересующийся геометрией, данная книга призвана провести вас по определенному пути – пути переживания чистого мышления. Книга швейцарского математика и педагога Арнольда Бернхардта — прекрасный, наглядный учебник по проективной геометрии, адресованный интересующимся математикой школьникам старших классов, учителям и студентам.



ISBN 585251070-X



9 785852 510709